习　题　6.2　换元积分法和分部积分法

1. 求下列不定积分：

(1) $\int \frac{dx}{4x-3}$;　　(2) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x^2}}$;

(3) $\int \frac{dx}{e^x - e^{-x}}$;　　(4) $\int e^{3x+2}\,dx$;

(5) $\int (2^x + 3^x)^2\,dx$;　　(6) $\int \frac{1}{2+5x^2}\,dx$;

(7) $\int \sin^5 x dx$;　　(8) $\int \tan^{10} x \sec^2 x dx$;

(9) $\int \sin 5x \cos 3x dx$;　　(10) $\int \cos^2 5x dx$;

(11) $\int \frac{(2x+4)dx}{(x^2+4x+5)^2}$;　　(12) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$;

(13) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[4]{1-2x^3}}$;　　(14) $\int \frac{1}{1-\sin x}\,dx$;

(15) $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}}\,dx$;　　(16) $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}}$;

(17) $\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 2}$;　　(18) $\int \frac{1-x}{\sqrt{9-4x^2}}\,dx$;

(19) $\int \tan\sqrt{1+x^2}\,\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$;　　(20) $\int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^4 x}\,dx$.

解　(1) $\int \frac{dx}{4x-3} = \frac{1}{4}\int \frac{d(4x-3)}{4x-3} = \frac{1}{4}\ln|4x-3| + C$。

(2) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d(\sqrt{2}x)}{\sqrt{1-2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin(\sqrt{2}x) + C$。

(3) $\int \frac{dx}{e^x - e^{-x}} = \int \frac{d\,e^x}{e^{2x}-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right| + C$。

(4) $\int e^{3x+2}\,dx = \frac{1}{3}\int e^{3x+2}\,d(3x+2) = \frac{1}{3}e^{3x+2} + C$。

(5) $\int (2^x+3^x)^2 dx=\int (2^{2x}+2\cdot 6^x+3^{2x})dx=\frac{1}{2\ln 2}2^{2x}+\frac{2}{\ln 6}6^x+\frac{1}{2\ln 3}3^{2x}+C$。

(6) $\int \frac{1}{2+5x^2}dx=\frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{1}{2+5x^2}d(\sqrt{5}x)=\frac{1}{\sqrt{10}}\arctan\sqrt{\frac{5}{2}}x+C$。

(7) $\int \sin^5 xdx=\int (1-\cos^2 x)^2 \sin xdx=-\int (1-2\cos^2 x+\cos^4 x)d\cos x$

$=-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+C$。

(8) $\int \tan^{10} x\sec^2 xdx=\int \tan^{10} xd\tan x=\frac{1}{11}\tan^{11} x+C$。

(9) $\int \sin 5x\cos 3xdx=\frac{1}{2}\int (\sin 8x+\sin 2x)dx=-\frac{1}{16}\cos 8x-\frac{1}{4}\cos 2x+C$。

(10) $\int \cos^2 5xdx=\frac{1}{2}\int (1+\cos 10x)dx=\frac{x}{2}+\frac{1}{20}\sin 10x+C$。

(11) $\int \frac{(2x+4)dx}{(x^2+4x+5)^2}=\int \frac{d(x^2+4x+5)}{(x^2+4x+5)^2}=-\frac{1}{x^2+4x+5}+C$。

(12) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=2\int \sin\sqrt{x}d\sqrt{x}=-2\cos\sqrt{x}+C$。

(13) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt[4]{1-2x^3}}=-\frac{1}{6}\int \frac{d(1-2x^3)}{\sqrt[4]{1-2x^3}}=-\frac{2}{9}(1-2x^3)^{\frac{3}{4}}+C$。

(14) $\int \frac{1}{1-\sin x}dx=\int \frac{1}{\sin^2(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4})}d(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4})=-\cot(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4})+C$。

(15) $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}dx=\int \frac{d(\sin x-\cos x)}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}=\frac{3}{2}(\sin x-\cos x)^{\frac{2}{3}}+C$。

(16) $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}=\int \frac{d\arcsin x}{(\arcsin x)^2}=-\frac{1}{\arcsin x}+C$。

(17) $\int \frac{dx}{x^2-2x+2}=\int \frac{d(x-1)}{1+(x-1)^2}=\arctan(x-1)+C$。

(18) $\int \frac{1-x}{\sqrt{9-4x^2}}dx=\frac{1}{2}\int \frac{d(2x)}{\sqrt{9-4x^2}}+\frac{1}{8}\int \frac{d(9-4x^2)}{\sqrt{9-4x^2}}$。

$=\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{3}x+\frac{1}{4}\sqrt{9-4x^2}+C$。

(19) $\int \tan\sqrt{1+x^2}\,\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx=\int \tan\sqrt{1+x^2}d\sqrt{1+x^2}=-\ln\left|\cos\sqrt{1+x^2}\right|+C$。

（20） $\int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d\sin^2 x}{1+\sin^4 x} = \frac{1}{2}\arctan(\sin^2 x)+C$。

2. 求下列不定积分：

(1) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$；

(2) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$；

(3) $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx$；

(4) $\int \frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2}dx$.

(5) $\int (x-1)(x+2)^{20}dx$；

(6) $\int x^2(x+1)^n dx$；

(7) $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$；

(8) $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx$；

(9) $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$；

(10) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}$；

(11) $\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}dx$；

(12) $\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}dx$；

(13) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{2x}}$；

(14) $\int x^2\sqrt[3]{1-x}\,dx$；

(15) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$；

(16) $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$；

(17) $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}dx$；

(18) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-x^2}}$；

(19) $\int \frac{x^{15}}{(x^4-1)^3}dx$；

(20) $\int \frac{1}{x(x^n+1)}dx$；

解（1） $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} = -\int \frac{de^{-x}}{\sqrt{e^{-2x}+1}} = -\ln(e^{-x}+\sqrt{e^{-2x}+1})+C$

$= \ln(\sqrt{1+e^{2x}}-1)-x+C$。

（2）当 $x>0$ 时，

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^{-2}+1}} = -\int \frac{dx^{-1}}{\sqrt{1+x^{-2}}} = \ln\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{|x|}+C$$ ；

当 $x<0$ 时，也有相同结果。

（3） $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx = 2\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{1+x}d\sqrt{x} = 2\int \arctan\sqrt{x}d\arctan\sqrt{x}$

$=\arctan^2\sqrt{x}+C$ 。

（4） $\int \frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2}dx = \int \frac{d(x\ln x)}{(x\ln x)^2} = -\frac{1}{x\ln x}+C$ 。

（5） $\int (x-1)(x+2)^{20}dx = \int [(x+2)^{21}-3(x+2)^{20}]dx$

$=\frac{1}{22}(x+2)^{22}-\frac{1}{7}(x+2)^{21}+C$ 。

（6） $\int x^2(x+1)^n dx = \int [(x+1)^{n+2}-2(x+1)^{n+1}+(x+1)^n]dx$

$=\frac{1}{n+3}(x+1)^{n+3}-\frac{2}{n+2}(x+1)^{n+2}+\frac{1}{n+1}(x+1)^{n+1}+C$ 。

（7）当 $x>0$ 时，

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{dx}{x^5\sqrt{1+x^{-2}}} = -\frac{1}{2}\int \frac{(x^{-2}+1-1)dx^{-2}}{\sqrt{1+x^{-2}}}$$

$$=-\frac{1}{3}\frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^3}+\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C \quad ;$$

当 $x<0$ 时，也有相同结果。

注：本题也可令 $x=\tan t$ 化简后解得。

（8）当 $x>0$ 时，

$$\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx = \int \frac{x^2-9}{x\sqrt{x^2-9}}dx = \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-9}}+3\int \frac{d(3x^{-1})}{\sqrt{1-9x^{-2}}}$$

$$=\sqrt{x^2-9}+3\arcsin\frac{3}{x}+C \quad ;$$

当 $x<0$ 时，也有相同结果。

注：本题也可令 $x=3\sec t$ 化简后解得。

（9）令 $x=\sin t$ ，则

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}} = \int \frac{\cos t dt}{\cos^3 t} = \int \sec^2 t dt = \tan t + c = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C$$。

（10）令 $x = a\tan t$，则

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}} = \int \frac{\cos t}{a^2} dt = \frac{1}{a^2}\sin t + c = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} + C$$。

（11）$\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}} dx = \int \frac{x-a}{\sqrt{x^2-a^2}} dx = \sqrt{x^2-a^2} - a\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$。

（12）$\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}\, dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{2ax-x^2}} dx = -\int \sqrt{2ax-x^2} dx + \int \frac{2ax}{\sqrt{2ax-x^2}} dx$

$$= -\int \sqrt{2ax-x^2} dx - a\int \frac{d(2ax-x^2)}{\sqrt{2ax-x^2}} + 2a^2\int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$$

$$= -\frac{x-a}{2}\sqrt{2ax-x^2} + \frac{3}{2}a^2 \arcsin\frac{x-a}{a} - 2a\sqrt{2ax-x^2} + C$$

$$= -\frac{x+3a}{2}\sqrt{2ax-x^2} + \frac{3}{2}a^2 \arcsin\frac{x-a}{a} + C$$。

注：本题答案也可写成 $-\frac{x+3a}{2}\sqrt{2ax-x^2} + 3a^2 \arcsin\sqrt{\frac{x}{2a}} + C$。

（13）令 $t = \sqrt{2x}$，则 $x = \frac{1}{2}t^2, dx = tdt$，于是

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{2x}} = \int \frac{tdt}{1+t} = t - \ln|1+t| + c = \sqrt{2x} - \ln(1+\sqrt{2x}) + C$$。

（14）令 $t = \sqrt[3]{1-x}$，则 $x = 1-t^3, dx = -3t^2 dt$，于是

$$\int x^2\sqrt[3]{1-x}\, dx = -3\int (1-t^3)^2 t^3 dt = -3\int (t^3 - 2t^6 + t^9) dt$$

$$= -\frac{3}{4}(1-x)^{\frac{4}{3}} + \frac{6}{7}(1-x)^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{10}(1-x)^{\frac{10}{3}} + C$$。

（15）$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^{-2}}} = -\int \frac{dx^{-1}}{\sqrt{1-x^{-2}}} = \arccos\frac{1}{x} + C$。

（16）令 $x = a\sin t$，则

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \int a^2 \sin^2 t dt = \frac{a^2}{2}\int (1-\cos 2t) dt$$

$$=\frac{a^2}{2}t-\frac{a^2}{4}\sin 2t+c=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}-\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C。$$

（17）令 $x=a\cos t$ ，则

$$\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}dx=-\frac{1}{a^2}\int\frac{\sin^2 t}{\cos^4 t}dt=-\frac{1}{a^2}\int\tan^2 td\tan x$$

$$=-\frac{1}{3a^2}\tan^3 t+c=-\frac{1}{3a^2}\cdot\frac{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}{x^3}+C。$$

（18）$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{(1-\sqrt{1-x^2})dx}{x^2}=-\frac{1}{x}-\int\frac{1-x^2}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\int\frac{dx^{-2}}{\sqrt{x^{-2}-1}}+\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}+\arcsin x+C。$$

注：本题也可令 $x=\sin t$ 后，解得

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x-\tan(\frac{1}{2}\arcsin x)+C。$$

（19）令 $t=x^4-1$，则

$$\int\frac{x^{15}}{(x^4-1)^3}dx=\frac{1}{4}\int\frac{x^{12}}{(x^4-1)^3}dx^4=\frac{1}{4}\int\frac{(t+1)^3}{t^3}dt$$

$$=\frac{1}{4}\int(1+\frac{3}{t}+\frac{3}{t^2}+\frac{1}{t^3})dt=\frac{1}{4}t+\frac{3}{4}\ln|t|-\frac{3}{4t}-\frac{1}{8t^2}+C$$

$$=\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{4}\ln|x^4-1|-\frac{3}{4(x^4-1)}-\frac{1}{8(x^4-1)^2}+C。$$

（20）$$\int\frac{1}{x(x^n+1)}dx=\int\frac{1}{x^{n+1}(1+x^{-n})}dx=-\frac{1}{n}\int\frac{dx^{-n}}{1+x^{-n}}$$

$$=-\frac{1}{n}\ln|1+x^{-n}|+c=\frac{1}{n}\ln\left|\frac{x^n}{1+x^n}\right|+C。$$

3. 求下列不定积分：

(1) $\int x\mathrm{e}^{2x}dx$；

(2) $\int x\ln(x-1)dx$；

(3) $\int x^2\sin 3xdx$；

(4) $\int\frac{x}{\sin^2 x}dx$；

(5) $\int x\cos^2 xdx$； (6) $\int \arcsin x\,dx$；

(7) $\int \arctan xdx$； (8) $\int x^2\arctan xdx$；

(9) $\int x\tan^2 xdx$； (10) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x}}dx$；

(11) $\int \ln^2 x\,dx$； (12) $\int x^2\ln x\,dx$；

(13) $\int e^{-x}\sin 5xdx$； (14) $\int e^x\sin^2 x\,dx$；

(15) $\int \frac{\ln^3 x}{x^2}dx$； (16) $\int \cos(\ln x)\,dx$；

(17) $\int (\arcsin x)^2 dx$； (18) $\int \sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}}\,dx$；

(19) $\int e^{\sqrt{x+1}}\,dx$； (20) $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx$.

解 (1) $\int x\,e^{2x}\,dx=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx=\frac{1}{4}e^{2x}(2x-1)+C$。

(2) $\int x\ln(x-1)\,dx=\frac{1}{2}x^2\ln(x-1)-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x-1}dx=\frac{1}{2}(x^2-1)\ln(x-1)-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+C$。

(3) $\int x^2\sin 3xdx=-\frac{1}{3}x^2\cos 3x+\frac{2}{3}\int x\cos 3xdx$

$=\frac{1}{9}(2x\sin 3x-3x^2\cos 3x)-\frac{2}{9}\int\sin 3xdx$

$=\frac{2}{9}x\sin 3x-(\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{27})\cos 3x+C$。

(4) $\int\frac{x}{\sin^2 x}dx=-x\cot x+\int\cot xdx=-x\cot x+\ln|\sin x|+C$。

(5) $\int x\cos^2 xdx=\frac{1}{2}\int x(1+\cos 2x)dx=\frac{1}{4}(x^2+x\sin 2x)-\frac{1}{4}\int\sin 2xdx$

$=\frac{1}{4}(x^2+x\sin 2x)+\frac{1}{8}\cos 2x+C$。

(6) $\int\arcsin x\,dx=x\arcsin x-\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$。

(7) $\int\arctan xdx=x\arctan x-\int\frac{xdx}{1+x^2}=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$。

(8) $\int x^2\arctan xdx=\frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{1}{3}\int\frac{x^3}{1+x^2}dx=\frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{3}\int\frac{xdx}{1+x^2}$

$=\frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}\ln(1+x^2)+C$。

（9） $\int x\tan^2 xdx = \int x(\sec^2 x - 1)dx = x\tan x - \frac{1}{2}x^2 - \int \tan xdx$

$= x\tan x - \frac{1}{2}x^2 + \ln|\cos x| + C$。

（10） $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x}}dx = -2\int \arcsin xd\sqrt{1-x} = -2\sqrt{1-x}\arcsin x + 2\int \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$

$= -2\sqrt{1-x}\arcsin x + 4\sqrt{1+x} + C$。

（11） $\int \ln^2 x\,dx = x\ln^2 x - 2\int \ln xdx = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C$。

（12） $\int x^2 \ln x\,dx = \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{3}\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{9}x^3 + C$。

（13） $\int \mathrm{e}^{-x}\sin 5xdx = -e^{-x}\sin 5x + 5\int e^{-x}\cos 5xdx$

$= -e^{-x}(\sin 5x + 5\cos 5x) - 25\int e^{-x}\sin 5xdx$，

所以

$$\int \mathrm{e}^{-x}\sin 5xdx = -\frac{1}{26}e^{-x}(\sin 5x + 5\cos 5x) + C。$$

（14） $\int \mathrm{e}^{x}\sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int e^x dx - \frac{1}{2}\int e^x\cos 2xdx = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}\int e^x\cos 2xdx$。

$\int e^x\cos 2xdx = e^x\cos 2x + 2\int e^x\sin 2xdx = e^x(\cos 2x + 2\sin 2x) - 4\int e^x\cos 2xdx$，

从而

$$\int e^x\cos 2xdx = \frac{1}{5}e^x(\cos 2x + 2\sin 2x) + C，$$

所以

$$\int \mathrm{e}^{x}\sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{10}e^x(\cos 2x + 2\sin 2x) + C。$$

（15） $\int \frac{\ln^3 x}{x^2}dx = -\frac{\ln^3 x}{x} + 3\int \frac{\ln^2 x}{x^2}dx = -\frac{\ln^3 x + 3\ln^2 x}{x} + 6\int \frac{\ln x}{x^2}dx$

$= -\frac{\ln^3 x + 3\ln^2 x + 6\ln x}{x} + 6\int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{\ln^3 x + 3\ln^2 x + 6\ln x + 6}{x} + C$。

（16） $\int \cos(\ln x)\,dx = x\cos(\ln x) + \int x\sin(\ln x)\frac{1}{x}dx$

$= x[\cos(\ln x) + \sin(\ln x)] - \int \cos(\ln x)dx$，

所以

$$\int \cos(\ln x)\,dx = \frac{1}{2}x[\cos(\ln x)+\sin(\ln x)]+C。$$

注：若令 $t=\ln x$，则可看出本题与第（13）题本质上是同一种类型题。

（17）$\int (\arcsin x)^2 dx = x(\arcsin x)^2 - 2\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x dx$

$$= x(\arcsin x)^2 + 2\int \arcsin x d\sqrt{1-x^2}$$

$$= x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C。$$

（18）令 $t=\sqrt{x}$，则 $x=t^2$，于是

$$\int \sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}}\,dx = 2\int te^t t dt = 2e^t t^2 - 4\int te^t dt = 2e^t(t^2-2t)+4\int e^t dt$$

$$= 2e^t(t^2-2t+2)+c = 2e^{\sqrt{x}}(x-2\sqrt{x}+2)+C。$$

（19）令 $t=\sqrt{x+1}$，则 $x=t^2-1$，于是

$$\int e^{\sqrt{x+1}}\,dx = 2\int e^t\,tdt = 2te^t - 2\int e^t dt = 2e^t(t-1)+c = 2e^{\sqrt{x+1}}(\sqrt{x+1}-1)+C。$$

（20）$\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx = x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$$= x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C。$$

4． 已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $\frac{\sin x}{1+x\sin x}$，求 $\int f(x)f'(x)dx$。

解 由题意

$$f(x)=\left(\frac{\sin x}{1+x\sin x}\right)' = \frac{\cos x - \sin^2 x}{(1+x\sin x)^2}，$$

于是

$$\int f(x)f'(x)dx = \int f(x)df(x) = \frac{1}{2}f^2(x)+C = \frac{(\cos x-\sin^2 x)^2}{2(1+x\sin x)^4}+C。$$

5．设 $f'(\sin^2 x)=\cos 2x+\tan^2 x$，求 $f(x)$。

解 设 $t=\sin^2 x$，则

$$f'(t) = 1-2\sin^2 x + \frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x} = 1-2t+\frac{t}{1-t} = \frac{1}{1-t}-2t，$$

从而

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(\frac{1}{1-x}-2x)dx=-\ln|1-x|-x^2+C。$$

6．设 $f(\ln x)=\frac{\ln(1+x)}{x}$，求 $\int f(x)dx$。

解 令 $t=\ln x$，则 $x=e^t$, $f(t)=\frac{\ln(1+e^t)}{e^t}$，于是

$$\int f(x)dx=\int\frac{\ln(1+e^x)}{e^x}dx=-\int\ln(1+e^x)de^{-x}=-\frac{\ln(1+e^x)}{e^x}+\int e^{-x}\frac{e^x}{1+e^x}dx$$

$$=-\frac{\ln(1+e^x)}{e^x}-\int\frac{1}{e^{-x}+1}de^{-x}=-\frac{\ln(1+e^x)}{e^x}-\ln(e^{-x}+1)+C$$

$$=-(e^{-x}+1)\ln(1+e^x)+x+C。$$

7. 求不定积分 $\int\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$ 与 $\int\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$。

解 记 $I_1=\int\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$，$I_2=\int\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$，则

$$I_1+I_2=\int dx=x+C_1,\quad I_1-I_2=\int\frac{d(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}=\ln|\sin x+\cos x|+C_2,$$

于是

$$I_1=\frac{1}{2}(x+\ln|\sin x+\cos x|)+C,\quad I_2=\frac{1}{2}(x-\ln|\sin x+\cos x|)+C。$$

8．求下列不定积分的递推表达式（n 为非负整数）：

(1) $I_n=\int\sin^n xdx$；

(2) $I_n=\int\tan^n xdx$；

(3) $I_n=\int\frac{dx}{\cos^n x}$；

(4) $I_n=\int x^n\sin x\,dx$；

(5) $I_n=\int e^x\sin^n x\,dx$；

(6) $I_n=\int x^\alpha\ln^n xdx$；

(7) $I_n=\int\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}dx$；

(8) $I_n=\int\frac{dx}{x^n\sqrt{1+x}}$.

解（1）

$$I_n=\int\sin^n xdx=-\int\sin^{n-1}xd\cos x=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)\int\sin^{n-2}x\cos^2 xdx$$

$$=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)\int\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)dx$$

$$=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)(I_{n-2}-I_n),$$

于是

$$\mathrm{I}_n=-\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x+\frac{n-1}{n}\mathrm{I}_{n-2}\,(n=2,3,4,\cdots)，$$

其中 $\mathrm{I}_0=x+C,\mathrm{I}_1=-\cos x+C$。

（2） $\mathrm{I}_n=\int\tan^n xdx=\int\tan^{n-2}x(\sec^2 x-1)dx=\int\tan^{n-2}xd\tan x-\mathrm{I}_{n-2}$

$=\frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x-\mathrm{I}_{n-2}\ (n=2,3,4,\cdots)$，

其中 $I_0=x+C,I_1=-\ln|\cos x|+C$。

（3） $\mathrm{I}_n=\int\frac{dx}{\cos^n x}=\int\frac{d\tan x}{\cos^{n-2}x}=\frac{\tan x}{\cos^{n-2}x}-(n-2)\int\frac{\tan x}{\cos^{n-1}x}\sin xdx$

$=\frac{\tan x}{\cos^{n-2}x}-(n-2)\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^n x}dx=\frac{\tan x}{\cos^{n-2}x}-(n-2)(\mathrm{I}_\mathrm{n}-\mathrm{I}_{n-2})$，

于是

$$\mathrm{I}_n=\frac{1}{n-1}\frac{\sin x}{\cos^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}\mathrm{I}_{n-2}\ (n=2,3,4,\cdots)，$$

其中 $I_0=x+C,I_1=\ln|\sec x+\tan x|+C$。

（4） $\mathrm{I}_n=\int x^n\sin x\,dx=-\int x^n d\cos x=-x^n\cos x+n\int x^{n-1}\cos xdx$

$=-x^n\cos x+nx^{n-1}\sin x-n(n-1)\int x^{n-2}\sin xdx$

$=-x^n\cos x+nx^{n-1}\sin x-n(n-1)\mathrm{I}_{n-2}\ (n=2,3,4,\cdots)$，

其中 $I_0=-\cos x+C,I_1=-x\cos x+\sin x+C$。

（5） $\mathrm{I}_n=\int\mathrm{e}^x\sin^n x\,dx=e^x\sin^n x-n\int\mathrm{e}^x\sin^{n-1}x\cos xdx$

$=e^x\sin^n x-ne^x\sin^{n-1}x\cos x+n\int\mathrm{e}^x[(n-1)\sin^{n-2}x\cos^2 x-\sin^n x]dx$

$=e^x\sin^n x-ne^x\sin^{n-1}x\cos x+n[(n-1)\mathrm{I}_{n-2}-n\mathrm{I}_n]$，

于是

$$\mathrm{I}_n=\frac{1}{1+n^2}e^x(\sin^n x-n\sin^{n-1}x\cos x)+\frac{n(n-1)}{1+n^2}\mathrm{I}_{n-2}\ (n=2,3,4,\cdots)，$$

其中 $I_0=e^x+C,I_1=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$。

（6）当 $\alpha=-1$ 时，

$$\mathrm{I}_n=\int x^{-1}\ln^n x dx=\int \ln^n x\, d\ln x=\frac{1}{n+1}\ln^{n+1}x+C$$ ；

当$\alpha\neq -1$时，

$$\mathrm{I}_n=\int x^{\alpha}\ln^n x dx=\frac{1}{1+\alpha}\left(x^{1+\alpha}\ln^n x-n\int x^{1+\alpha}\ln^{n-1}x\cdot\frac{1}{x}dx\right)$$

$$=\frac{1}{1+\alpha}x^{1+\alpha}\ln^n x-\frac{n}{1+\alpha}\mathrm{I}_{n-1}\ (n=1,2,3,\cdots)$$ ，

其中$I_0=\dfrac{1}{1+\alpha}x^{1+\alpha}+C$。

（7） $$\mathrm{I}_n=\int\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\int x^{n-1}d\sqrt{1-x^2}=-x^{n-1}\sqrt{1-x^2}+(n-1)\int x^{n-2}\sqrt{1-x^2}dx$$

$$=-x^{n-1}\sqrt{1-x^2}+(n-1)\int\frac{x^{n-2}(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}dx=-x^{n-1}\sqrt{1-x^2}+(n-1)(\mathrm{I}_{n-2}-\mathrm{I}_n)$$ ，

于是

$$\mathrm{I}_n=-\frac{1}{n}x^{n-1}\sqrt{1-x^2}+\frac{n-1}{n}\mathrm{I}_{n-2}\ (n=2,3,4,\cdots)$$ ，

其中$I_0=\arcsin x+C,\ I_1=-\sqrt{1-x^2}+C$。

（8） $$\mathrm{I}_n=\int\frac{dx}{x^n\sqrt{1+x}}=2\int\frac{d\sqrt{1+x}}{x^n}=2\frac{\sqrt{1+x}}{x^n}+2n\int\frac{\sqrt{1+x}}{x^{n+1}}dx$$

$$=2\frac{\sqrt{1+x}}{x^n}+2n\int\frac{1+x}{x^{n+1}\sqrt{1+x}}dx=2\frac{\sqrt{1+x}}{x^n}+2n(\mathrm{I}_{n+1}+\mathrm{I}_n),$$

于是

$$\mathrm{I}_n=-\frac{1}{n-1}\frac{\sqrt{1+x}}{x^{n-1}}-\frac{2n-3}{2n-2}\mathrm{I}_{n-1}\ (\mathrm{n}=2,3,4,\cdots)$$ 。

其中$I_0=2\sqrt{1+x}+C,\quad I_1=\ln\left|\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}\right|+C$。

9．导出求$\displaystyle\int\frac{(ax+b)dx}{x^2+2\xi x+\eta^2}$，$\displaystyle\int\frac{(ax+b)dx}{\sqrt{x^2+2\xi x+\eta^2}}$和$\displaystyle\int(ax+b)\sqrt{x^2+2\xi x+\eta^2}dx$型不定积分的公式。

解 $$\int\frac{(ax+b)dx}{x^2+2\xi x+\eta^2}=\frac{a}{2}\int\frac{d(x^2+2\xi x+\eta^2)}{x^2+2\xi x+\eta^2}+(b-a\xi)\int\frac{dx}{(x+\xi)^2+\eta^2-\xi^2}$$

$$=\begin{cases} a\ln|x+\xi|-\dfrac{b-a\xi}{x+\xi}+C, \quad |\xi|=|\eta|\,; \\ \dfrac{a}{2}\ln\left|x^2+2\xi x+\eta^2\right|+\dfrac{b-a\xi}{\sqrt{\eta^2-\xi^2}}\arctan\dfrac{x+\xi}{\sqrt{\eta^2-\xi^2}}+C, \quad |\xi|<|\eta|\,; \\ \dfrac{a}{2}\ln\left|x^2+2\xi x+\eta^2\right|+\dfrac{b-a\xi}{2\sqrt{\xi^2-\eta^2}}\ln\left|\dfrac{x+\xi-\sqrt{\xi^2-\eta^2}}{x+\xi+\sqrt{\xi^2-\eta^2}}\right|+C, \quad |\xi|>|\eta|。\end{cases}$$

$$\int\frac{(ax+b)dx}{\sqrt{x^2+2\xi x+\eta^2}}=\frac{a}{2}\int\frac{d(x^2+2\xi x+\eta^2)}{\sqrt{x^2+2\xi x+\eta^2}}+(b-a\xi)\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2\xi x+\eta^2}}$$

$$=a\sqrt{x^2+2\xi x+\eta^2}+(b-a\xi)\ln\left|x+\xi+\sqrt{x^2+2\xi x+\eta^2}\right|+C。$$

$$\int(ax+b)\sqrt{x^2+2\xi x+\eta^2}\,dx$$

$$=\frac{a}{2}\int\sqrt{x^2+2\xi x+\eta^2}\,d(x^2+2\xi x+\eta^2)+(b-a\xi)\int\sqrt{x^2+2\xi x+\eta^2}\,dx$$

$$=\frac{a}{3}(x^2+2\xi x+\eta^2)^{\frac{3}{2}}+\frac{b-a\xi}{2}\left[(x+\xi)\sqrt{x^2+2\xi x+\eta^2}+(\eta^2-\xi^2)\ln\left|(x+\xi)+\sqrt{x^2+2\xi x+\eta^2}\right|\right]。$$

10．求下列不定积分:

(1) $\int(5x+3)\sqrt{x^2+x+2}\,dx$;　　(2) $\int(x-1)\sqrt{x^2+2x-5}\,dx$;

(3) $\int\dfrac{(x-1)dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$;　　(4) $\int\dfrac{(x+2)dx}{\sqrt{5+x-x^2}}$.

解 (1) $\int(5x+3)\sqrt{x^2+x+2}\,dx=\dfrac{5}{2}\int\sqrt{x^2+x+2}\,d(x^2+x+2)+\dfrac{1}{2}\int\sqrt{x^2+x+2}\,dx$

$$=\frac{5}{3}(x^2+x+2)^{\frac{3}{2}}+\frac{2x+1}{8}\sqrt{x^2+x+2}+\frac{7}{16}\ln(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+2})+C。$$

(2) $\int(x-1)\sqrt{x^2+2x-5}\,dx=\dfrac{1}{2}\int\sqrt{x^2+2x-5}\,d(x^2+2x-5)-2\int\sqrt{x^2+2x-5}\,dx$

$$=\frac{1}{3}(x^2+2x-5)^{\frac{3}{2}}-(x+1)\sqrt{x^2+2x-5}+6\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x-5}\right|+C。$$

(3) $\int\dfrac{(x-1)dx}{\sqrt{x^2+x+1}}=\dfrac{1}{2}\int\dfrac{d(x^2+x+1)}{\sqrt{x^2+x+1}}-\dfrac{3}{2}\int\dfrac{dx}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}}$

$$=\sqrt{x^2+x+1}-\frac{3}{2}\ln(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1})+C$$ 。

（4） $\int\frac{(x+2)dx}{\sqrt{5+x-x^2}}=-\frac{1}{2}\int\frac{d(5+x-x^2)}{\sqrt{5+x-x^2}}+\frac{5}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{5+x-x^2}}$

$$=-\sqrt{5+x-x^2}+\frac{5}{2}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{21}}+C$$ 。

11． 设 n 次多项式 $p(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$,系数满足关系 $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{(i-1)!}=0$ ，证明不定积分 $\int p\left(\frac{1}{x}\right)e^xdx$ 是初等函数。

证 设 $I_k=\int\frac{1}{x^k}e^xdx$ ，则

$$I_k=-\frac{1}{k-1}\int e^xd\frac{1}{x^{k-1}}=-\frac{1}{k-1}\frac{e^x}{x^{k-1}}+\frac{1}{k-1}\int\frac{1}{x^{k-1}}e^xdx$$ ，

$$=-\frac{1}{k-1}\frac{e^x}{x^{k-1}}+\frac{1}{k-1}I_{k-1}\quad(k=2,3,\cdots,n)$$ ，

由此得到

$$I_k=q_{k-1}(\frac{1}{x})e^x+\frac{1}{(k-1)!}\int\frac{e^x}{x}dx\ (k=2,3,\cdots,n)$$ ，

其中 $q_{k-1}(t)$ 是 t 的 $k-1$ 次多项式。当 $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{(i-1)!}=0$ 时，积分

$$\int p\left(\frac{1}{x}\right)e^xdx=a_0e^x+\sum_{i=1}^{n}a_i\int\frac{e^x}{x^i}dx=a_0e^x+\sum_{i=2}^{n}a_iq_{i-1}(\frac{1}{x})e^x+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{(i-1)!}\int\frac{e^x}{x}dx$$

$$=a_0e^x+\sum_{i=2}^{n}a_iq_{i-1}(\frac{1}{x})e^x+C$$

为初等函数。