第二章　数列极限

习　题 2.1　实数系的连续性

1. (1) 证明$\sqrt{6}$不是有理数；

(2) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$是不是有理数?

证 (1) 反证法。若$\sqrt{6}$是有理数，则可写成既约分数$\sqrt{6}=\dfrac{m}{n}$。由$m^2=6n^2$，可知m是偶数，设$m=2k$，于是有$3n^2=2k^2$，从而得到n是偶数，这与$\dfrac{m}{n}$是既约分数矛盾。

（2） $\sqrt{3}+\sqrt{2}$不是有理数。若$\sqrt{3}+\sqrt{2}$是有理数，则可写成既约分数$\sqrt{3}+\sqrt{2}=\dfrac{m}{n}$，于是$3+2\sqrt{6}+2=\dfrac{m^2}{n^2}$，$\sqrt{6}=\dfrac{m^2}{2n^2}-\dfrac{5}{2}$，即$\sqrt{6}$是有理数，与（1）的结论矛盾。

2. 求下列数集的最大数、最小数，或证明它们不存在：

$A=\{x\,|\,x\ge 0\}$；

$B=\left\{\sin x\,\middle|\, 0<x<\dfrac{2\pi}{3}\right\}$；

$C=\left\{\dfrac{n}{m}\,\middle|\, m,n\in\mathbf{N}^+\text{并且}n<m\right\}$。

解　$\min A=0$；因为$\forall x\in A$，有$x+1\in A$，$x+1>x$，所以$\max A$不存在。

$\max B=\sin\dfrac{\pi}{2}=1$；因为$\forall x\in B$，$\exists\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，使得$x=\sin\alpha$，于是有$\sin\dfrac{\alpha}{2}\in B$，$\sin\dfrac{\alpha}{2}<x$，所以$\min B$不存在。

$\max C$ 与 $\min C$ 都不存在，因为 $\forall \frac{n}{m} \in C$，有 $\frac{n}{m+1} \in C$，$\frac{n+1}{m+1} \in C$，$\frac{n}{m+1} < \frac{n}{m} < \frac{n+1}{m+1}$，所以 $\max C$ 与 $\min C$ 都不存在。

3. A, B 是两个有界集，证明：

(1) $A \cup B$ 是有界集；

(2) $S = \{x + y | x \in A, y \in B\}$ 也是有界集。

证 （1）设 $\forall x \in A$，有 $|x| \le M_1$，$\forall x \in B$，有 $|x| \le M_2$，则 $\forall x \in A \cup B$，有 $|x| \le \max\{M_1, M_2\}$。

（2）设 $\forall x \in A$，有 $|x| \le M_1$，$\forall x \in B$，有 $|x| \le M_2$，则 $\forall x \in S$，有 $|x| \le M_1 + M_2$。

4. 设数集 S 有上界，则数集 $T = \{x | -x \in S\}$ 有下界，且 $\sup S = -\inf T$。

证 设数集 S 的上确界为 $\sup S$，则对任意 $x \in T = \{x | -x \in S\}$，有 $-x \le \sup S$，即 $x \ge -\sup S$；同时对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $y \in S$，使得 $y > \sup S - \varepsilon$，于是 $-y \in T$，且 $-y < -\sup S + \varepsilon$。所以 $-\sup S$ 为集合 T 的下确界，即 $\inf T = -\sup S$。

5. 证明有界数集的上、下确界唯一。

证 设 $\sup S$ 既等于 A，又等于 B，且 $A < B$。取 $\varepsilon = \frac{B-A}{2} > 0$，因为 B 为集合 S 的上确界，所以存在 $x \in S$，使得 $x > B - \varepsilon > A$，这与 A 为集合 S 的上确界矛盾，所以 $A = B$，即有界数集的上确界唯一。同理可证有界数集的下确界唯一。

6. 对任何非空数集 S，必有 $\sup S \ge \inf S$。当 $\sup S = \inf S$ 时，数集 S 有什么特点?

解 对于任意的 $x \in S$，有 $\inf S \le x \le \sup S$，所以 $\sup S \ge \inf S$。当 $\sup S = \inf S$ 时，数集 S 是由一个实数构成的集合。

7. 证明非空有下界的数集必有下确界。

证 参考定理2.1.1的证明。

8. 设$S=\{x|\ x\in\mathbf{Q}并且x^2<3\}$，证明：

(1) S没有最大数与最小数；

(2) S在$\mathbf{Q}$内没有上确界与下确界。

证 （1）$\forall\frac{q}{p}\in S$，$\frac{q}{p}>0$，则$\left(\frac{q}{p}\right)^2<3$，$\frac{q}{p}<2$。取有理数$r>0$充分小，使得$r^2+4r<3-\left(\frac{q}{p}\right)^2$，于是$\left(\frac{q}{p}+r\right)^2=\left(\frac{q}{p}\right)^2+r^2+\frac{2q}{p}r<\left(\frac{q}{p}\right)^2+r^2+4r<3$，即$\frac{q}{p}+r\in S$，所以$S$没有最大数。同理可证$S$没有最小数。

（2）反证法。设S在$\mathbf{Q}$内有上确界，记$\sup S=\frac{n}{m}$（$m,n\in\mathbf{N}^+$且m,n互质），则显然有$0<\frac{n}{m}<2$。由于有理数平方不能等于3，所以只有两种可能：

(i) $\left(\frac{n}{m}\right)^2<3$，由(1)可知存在充分小的有理数$r>0$，使得$\left(\frac{n}{m}+r\right)^2<3$，这说明$\frac{n}{m}+r\in S$，与$\sup S=\frac{n}{m}$矛盾；

(ii) $\left(\frac{n}{m}\right)^2>3$，取有理数$r>0$充分小，使得$4r-r^2<\left(\frac{n}{m}\right)^2-3$，于是$\left(\frac{n}{m}-r\right)^2=\left(\frac{n}{m}\right)^2-\frac{2n}{m}r+r^2>\left(\frac{n}{m}\right)^2-4r+r^2>3$，这说明$\frac{n}{m}-r$也是$S$的上界，与$\sup S=\frac{n}{m}$矛盾。所以$S$没有上确界。

同理可证S没有下确界。

习　题　2.2　数列极限

1. 按定义证明下列数列是无穷小量：

(1) $\left\{\dfrac{n+1}{n^2+1}\right\}$；　　(2) $\{(-1)^n(0.99)^n\}$；

(3) $\left\{\dfrac{1}{n}+5^{-n}\right\}$；　　(4) $\left\{\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^3}\right\}$；

(5) $\left\{\dfrac{n^2}{3^n}\right\}$；　　(6) $\left\{\dfrac{3^n}{n!}\right\}$；

(7) $\left\{\dfrac{n!}{n^n}\right\}$；　　(8) $\left\{\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}-\cdots+(-1)^n\dfrac{1}{2n}\right\}$。

证　(1) $\forall\varepsilon\,(0<\varepsilon<2)$，取 $N=\left[\dfrac{2}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，成立 $0<\dfrac{n+1}{n^2+1}<\dfrac{2}{n}<\varepsilon$。

(2) $\forall\varepsilon\,(0<\varepsilon<1)$，取 $N=\left[\dfrac{\lg\varepsilon}{\lg 0.99}\right]$，当 $n>N$ 时，成立

$$\left|(-1)^n(0.99)^n\right|<(0.99)^{\frac{\lg\varepsilon}{\lg 0.99}}=\varepsilon\text{。}$$

(3) $\forall\varepsilon\,(0<\varepsilon<2)$，取 $N_1=\left[\dfrac{2}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N_1$ 时，成立 $\dfrac{1}{n}<\dfrac{\varepsilon}{2}$；取 $N_2=\left[\log_5\dfrac{2}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N_2$ 时，成立 $5^{-n}<\dfrac{\varepsilon}{2}$；则当 $n>N=\max\{N_1,N_2\}$ 时，成立 $\left|\dfrac{1}{n}+5^{-n}\right|<\varepsilon$。

(4) $\forall\varepsilon\,(0<\varepsilon<1)$，取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，成立

$$0<\frac{1+2+\cdots+n}{n^3}=\frac{n+1}{2n^2}<\frac{1}{n}<\varepsilon\text{。}$$

(5) 当 $n>11$ 时，有 $\dfrac{n^2}{3^n}=\dfrac{n^2}{(1+2)^n}<\dfrac{n^2}{2^3C_n^3}=\dfrac{6n}{8(n-1)(n-2)}<\dfrac{1}{n}$。于是 $\forall\varepsilon>0$，取 $N=\max\left\{11,\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]\right\}$，当 $n>N$ 时，成立 $0<\dfrac{n^2}{3^n}<\dfrac{1}{n}<\varepsilon$。

（6）当$n>5$，有$\frac{3^n}{n!}\le\frac{3^5}{5!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-5}<3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-5}$。于是$\forall\varepsilon\,(0<\varepsilon<3)$，取

$N=5+\left[\dfrac{\lg\frac{\varepsilon}{3}}{\lg\frac{1}{2}}\right]$，当$n>N$时，成立$0<\frac{3^n}{n!}<3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-5}<\varepsilon$。

（7）记$\frac{n}{2}$的整数部分为m，则有$\frac{n!}{n^n}<\left(\frac{1}{2}\right)^m$。$\forall\varepsilon\,(0<\varepsilon<1)$，取

$N=2\left[\dfrac{\lg\varepsilon}{\lg\frac{1}{2}}\right]+4$，当$n>N$时，有$m>\frac{N}{2}-1>\dfrac{\lg\varepsilon}{\lg\frac{1}{2}}$，于是成立

$0<\frac{n!}{n^n}<\left(\frac{1}{2}\right)^m<\varepsilon$。

（8）首先有不等式$0<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n}<\frac{1}{n}$。$\forall\varepsilon\,(0<\varepsilon<1)$，取$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，当$n>N$时，成立$0<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n}<\frac{1}{n}<\varepsilon$。

2. 按定义证明下述极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-1}{3n^2+2}=\frac{2}{3}$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}}{n}=1$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)=\frac{1}{2}$；　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3n+2}=1$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$,其中$x_n=\begin{cases}\dfrac{n+\sqrt{n}}{n}, & n\text{是偶数}，\\ 1-10^{-n}, & n\text{是奇数}，\end{cases}$。

证 （1）$\forall\varepsilon>0$，取$N=\left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]$，当$n>N$时，成立

$$\left|\frac{2n^2-1}{3n^2+2}-\frac{2}{3}\right|=\frac{7}{3(3n^2+2)}<\frac{1}{n^2}<\varepsilon。$$

（2）$\forall\varepsilon>0$，取$N=\left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]$，当$n>N$时，成立

$$\left|\frac{\sqrt{n^2+n}}{n}-1\right|=\frac{1}{\sqrt{n^2+n}+n}<\frac{1}{2n}<\varepsilon。$$

（3） $\forall\varepsilon>0$，取$N=\left[\frac{1}{8\varepsilon}\right]$，当$n>N$时，成立

$$\left|(\sqrt{n^2+n}-n)-\frac{1}{2}\right|=\frac{n}{2(\sqrt{n^2+n}+n)^2}<\frac{1}{8n}<\varepsilon。$$

（4）令$\sqrt[n]{3n+2}=1+a_n$，则$a_n>0$，$3n+2=(1+a_n)^n>1+C_n^2a_n^2$。当$n>3$时，有$a_n<\sqrt{\frac{2(3n+1)}{n(n-1)}}<\frac{3}{\sqrt{n}}$，所以$\forall\varepsilon>0$，取$N=\left[\frac{9}{\varepsilon^2}\right]$，当$n>N$时，成立

$$\left|\sqrt[n]{3n+2}-1\right|=a_n<\frac{3}{\sqrt{n}}<\varepsilon。$$

（5） $\forall\varepsilon\ (0<\varepsilon<1)$，取$N=\max\left\{\left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right],\left[\lg\frac{1}{\varepsilon}\right]\right\}$，当$n>N$时，若$n$是偶数，则成立$|x_n-1|=\frac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon$；若$n$是奇数，则成立$|x_n-1|=\frac{1}{10^n}<\varepsilon$。

3. 举例说明下列关于无穷小量的定义是不正确的：

(1) 对任意给定的$\varepsilon>0$，存在N，使当$n>N$时成立$x_n<\varepsilon$；

(2) 对任意给定的$\varepsilon>0$，存在无穷多个x_n,使｜x_n｜＜ε。

解　（1）例如$x_n=-n$，则$\{x_n\}$满足条件，但不是无穷小量。

（2）例如$x_n=\begin{cases} n & n\text{是奇数} \\ \frac{1}{n} & n\text{是偶数}\end{cases}$，则$\{x_n\}$满足条件，但不是无穷小量。

4. 设k是一正整数，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$的充分必要条件是$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+k}=a$。

证　设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，$\forall n>N$，成立$|x_n-a|<\varepsilon$，于是也成立$|x_{n+k}-a|<\varepsilon$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+k}=a$；

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+k}=a$，则$\forall\varepsilon>0$，$\exists N'$，$\forall n>N'$，成立$|x_{n+k}-a|<\varepsilon$，取

$N = N' + k$，则$\forall n > N$，成立$|x_n - a| < \varepsilon$，所以$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$。

5. 设$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = a$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$。

证　由$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = a$，可知$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N_1$，$\forall n > N_1$，成立$|x_{2n} - a| < \varepsilon$；$\exists N_2$，$\forall n > N_2$，成立$|x_{2n+1} - a| < \varepsilon$。于是取$N = \max\{2N_1, 2N_2 + 1\}$，$\forall n > N$，成立$|x_n - a| < \varepsilon$。

6. 设$x_n \ge 0$，且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \ge 0$,证明：$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}$。

证　首先有不等式$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| \le \sqrt{|x - a|}$。由$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，可知$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N$，$\forall n > N$，成立$|x_n - a| < \varepsilon^2$，于是$\left|\sqrt{x_n} - \sqrt{a_n}\right| \le \sqrt{|x_n - a_n|} < \varepsilon$。

7. $\{x_n\}$是无穷小量，$\{y_n\}$是有界数列，证明$\{x_n y_n\}$也是无穷小量。

证　设对一切n，$|y_n| \le M$。因为$\{x_n\}$是无穷小量，所以$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N$，$\forall n > N$，成立$|x_n| < \dfrac{\varepsilon}{M}$。于是$\forall n > N$，成立$|x_n y_n| < \varepsilon$，所以$\{x_n y_n\}$也是无穷小量。

8. 利用夹逼法计算极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+\sqrt{1}} + \dfrac{1}{n+\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{n+\sqrt{n}}\right)$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n^2}^{(n+1)^2}\dfrac{1}{\sqrt{k}}$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}$。

解（1）由$1 < \left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} < \sqrt[n]{n}$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$，可知

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=1\text{。}$$

(2) 由 $\frac{n}{n+\sqrt{n}}<\left(\frac{1}{n+\sqrt{1}}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{n+\sqrt{n}}\right)<\frac{n}{n+1}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+\sqrt{n}}=1$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$，可知

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+\sqrt{1}}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{n+\sqrt{n}}\right)=1\text{。}$$

(3) 由 $2=\frac{2n+2}{n+1}<\sum\limits_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt{k}}<\frac{2n+2}{n}$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+2}{n}=2$，可知

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt{k}}=2\text{。}$$

(4) 应用不等式 $2k>\sqrt{(2k-1)(2k+1)}$，得到 $0<\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$，

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}=0$，可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)}=0\text{。}$$

9. 求下列数列的极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+4n-1}{n^2+1}$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3+2n^2-3n+1}{2n^3-n+3}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n+n^3}{3^{n+1}+(n+1)^3}$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n^2+1}-1)\sin\frac{n\pi}{2}$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$；

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt[4]{n^2+1}-\sqrt{n+1})$；

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n!}}$；

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n\lg n}$；

(10) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)$。

解（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+4n-1}{n^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+\dfrac{4}{n}-\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n^2}}=3$。

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+2n^2-3n+1}{2n^3-n+3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{2}{n}-\dfrac{3}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}}{2-\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{3}{n^3}}=\dfrac{1}{2}$。

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+n^3}{3^{n+1}+(n+1)^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{n^3}{3^n}}{3\left[1+\dfrac{(n+1)^3}{3^{n+1}}\right]}=\dfrac{1}{3}$。

（4）因为$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2+1}=1$，$|\sin\dfrac{n\pi}{2}|\le 1$，所以

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n^2+1}-1)\sin\frac{n\pi}{2}=0。$$

（5）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1}=\dfrac{1}{2}$。

（6）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt[4]{n^2+1}-\sqrt{n+1})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}[n^2+1-(n+1)^2]}{(\sqrt[4]{n^2+1}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n^2+1}+n+1)}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-2n\sqrt{n}}{(\sqrt[4]{n^2+1}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n^2+1}+n+1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-2}{\left(\sqrt[4]{1+\dfrac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}\right)\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}+1+\dfrac{1}{n}\right)}=-\frac{1}{2}。$$

（7）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\lg 1+\lg\dfrac{1}{2}+\cdots+\lg\dfrac{1}{n}}{n}=-\infty$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n!}}=0。$$

（8）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot3}{2^2}\cdot\frac{2\cdot4}{3^2}\cdot\frac{3\cdot5}{4^2}\cdot\cdots\cdot\frac{(n-2)n}{(n-1)^2}\cdot\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}。$$

（9）$1<\sqrt[n]{n\lg n}<\sqrt[n]{n^2}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2}=1$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n\lg n}=1。$$

（10）设 $x_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$，则 $2x_n=1+\frac{3}{2}+\frac{5}{2^2}\cdots+\frac{2n-1}{2^{n-1}}$，两式相减，得到 $x_n=1+(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}})-\frac{2n-1}{2^n}$。由

$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}})=2$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2^n}=0$，可知

$$\lim_{n\to\infty}x_n=3。$$

10. 证明：若 $a_n>0$（$n=1,2,\cdots$），且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=l>1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$。

证 取 $1<r<l$，由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=l>1$，可知 $\exists N,\forall n>N$，成立 $\frac{a_n}{a_{n+1}}>r>1$，于是 $0<a_n<a_{N+1}\left(\frac{1}{r}\right)^{n-N-1}$。由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{a_{N+1}\left(\frac{1}{r}\right)^{n-N-1}\right\}=0$ 可知

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0。$$

11．证明：若 $a_n>0$（$n=1,2,\cdots$），且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=a$。

证　由 $\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{a_1\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\cdots\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}}$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=a$，可知

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=a。$$

12. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ 存在，证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(a_1+2a_2+\cdots+na_n)=0$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(n!\cdot a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}=0\quad(a_i>0,\,i=1,2,\cdots,n)$。

解（1）设$a_1+a_2+\cdots+a_n=S_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=a$，则由$\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k=nS_n-\sum\limits_{k=1}^{n-1}S_k$可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}ka_k=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}[\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}S_k]=a-a=0。$$

（2）由$0<(n!\cdot a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}\le\frac{1}{n}(a_1+2a_2+\cdots+na_n)$与（1），即得到

$$\lim_{n\to\infty}(n!\cdot a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}=0。$$

13. 已知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}=ab。$$

证　令$a_n=a+\alpha_n, b_n=b+\beta_n$，由$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，可知$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=0$。设$\forall n\in\mathrm{N}^+$，$|\beta_n|\le M$。因为

$$\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}=ab+\frac{b}{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k+\frac{a}{n}\sum_{k=1}^{n}\beta_k+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\beta_{n-k+1}，$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k\beta_{n-k+1}|\le\frac{M}{n}\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|，$$

由$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}|\alpha_k|=0$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\beta_k=0$，得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}=ab。$$

14. 设数列$\{a_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$　$(-\infty<a<+\infty)$。证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0。$$

证　因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n-1}{n}\cdot\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1})=a$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n})=0。$$