§5　方向导数、梯度

方向导数

多元函数的偏导数反映了函数值沿坐标轴方向的变化率，而许多实际问题中常常还需要掌握函数在某点处沿某一指定方向的变化率。例如，为了预测某地的风向和风力，必须掌握该地气压沿各个方向的变化率。这就引出了方向导数的概念。

定义 7.5.1　设 f 是定义于 $\mathbf{R}^n$ 中某区域 D 上的函数，点 $P_0 \in D$，l 为一给定的非零向量，P 为一动点，向量 P_0P 与 l 的方向始终一致。如果极限

$$\lim_{\|P_0P\|\to 0} \frac{f(P)-f(P_0)}{\|\overrightarrow{P_0P}\|}$$

存在，则称此极限为函数 f 在 P_0 处沿 l 方向的**方向导数**，记作 $\frac{\partial f}{\partial l}$。

对于可微函数而言，不仅有关于各个自变量的偏导数，而且有沿任何方向的方向导数，这些方向导数还可以用偏导数来表示。下面我们就来证明这一结论，并导出计算公式。

为了便于刻画方向，先介绍方向余弦的概念。设$\boldsymbol{l}$是一个n维非零向量，$\boldsymbol{l}_0=\frac{\boldsymbol{l}}{\|\boldsymbol{l}\|}$，即$\boldsymbol{l}_0$是与$\boldsymbol{l}$同向的单位向量。取$0\le\alpha_i\le\pi$，使$\boldsymbol{l}_0=(\cos\alpha_1,\cdots,\cos\alpha_n)$。显然，$\cos^2\alpha_1+\cdots+\cos^2\alpha_n=1$。称

$$\cos\alpha_1,\ \cos\alpha_2,\ \cdots,\ \cos\alpha_n$$

为向量$\boldsymbol{l}$的**方向余弦**。

例如，对$\mathbf{R}^3$中向量$a=3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$，有$\|\boldsymbol{a}\|=\sqrt{3^2+(-4)^2+5^2}=5\sqrt{2}$。取单位向量

$$\boldsymbol{a}_0=\frac{\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|}=\frac{3}{5\sqrt{2}}\boldsymbol{i}-\frac{4}{5\sqrt{2}}\boldsymbol{j}+\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{k},$$

即得$\boldsymbol{a}$的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{3}{5\sqrt{2}},\quad \cos\beta=-\frac{4}{5\sqrt{2}},\quad \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{2}}。$$

定理 7.5.1 若函数f在点P_0处可微，向量$\boldsymbol{l}$的方向余弦为$\cos\alpha_1,\cos\alpha_2,\cdots,\cos\alpha_n$，则函数$f$在点$P_0$处沿$\boldsymbol{l}$方向的方向导数存在，且

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0}=\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{P_0}\cos\alpha_1+\left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{P_0}\cos\alpha_2+\cdots+\left.\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|_{P_0}\cos\alpha_n。$$

证 因为 f 在 P_0 处可微，向量 $\overrightarrow{P_0P}=(\Delta x_1,\cdots,\Delta x_n)$ 与 $\boldsymbol{l}$ 同向，

$$f(P)-f(P_0)=\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{P_0}\Delta x_1+\cdots+\left.\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|_{P_0}\Delta x_n+o(\|\overrightarrow{P_0P}\|)。$$

这样

$$\lim_{\|P_0P\|\to 0}\frac{f(P)-f(P_0)}{\|\overrightarrow{P_0P}\|}=\lim_{\|P_0P\|\to 0}\left[\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{P_0}\frac{\Delta x_1}{\|\overrightarrow{P_0P}\|}+\cdots+\left.\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|_{P_0}\frac{\Delta x_n}{\|\overrightarrow{P_0P}\|}+\frac{o(\|\overrightarrow{P_0P}\|)}{\|\overrightarrow{P_0P}\|}\right]$$

$$=\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{P_0}\cos\alpha_1+\cdots+\left.\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|_{P_0}\cos\alpha_n$$

因此 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0}$ 存在，且

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0}=\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{P_0}\cos\alpha_1+\left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{P_0}\cos\alpha_2+\cdots+\left.\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|_{P_0}\cos\alpha_n。$$

证毕

例 7.5.1 设函数 $f(x,y,z)=x^3y^2+z$，向量$\boldsymbol{l}=-4\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$。求函数 f 在点 $P_0(1,0,1)$ 处沿$\boldsymbol{l}$方向的方向导数。

解 显然，f 是处处可微的，它在P_0处的三个偏导数为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,0,1)}=\left.3x^2y^2\right|_{(1,0,1)}=0，\quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,0,1)}=\left.2x^3y\right|_{(1,0,1)}=0，\quad \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(1,0,1)}=1。$$

又向量$\boldsymbol{l}$的三个方向余弦分别为

$$\cos\alpha=0，\quad \cos\beta=-\frac{4}{5}，\quad \cos\gamma=\frac{3}{5}。$$

所以在P_0处沿$\boldsymbol{l}$方向的方向导数为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(1,0,1)}=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,0,1)}\cos\alpha+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,0,1)}\cos\beta+\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(1,0,1)}\cos\gamma=\frac{3}{5}。$$

下例说明，一个函数即使在某一点处连续，可偏导，且沿所有方向的方向导数都存在，也不一定在该点可微。

例 7.5.2 设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

由于

$$|f(x,y)|=\left|\frac{2xy}{x^2+y^2}y\right|\leq\left|\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}y\right|=|y|,$$

所以 f 在 $(0,0)$ 点连续（见图 7.5.1）。

f 在 $(0,0)$ 点沿方向 $\boldsymbol{l}=\|\boldsymbol{l}\|(\cos\alpha,\sin\alpha)$（$\alpha$ 为 $\boldsymbol{l}$ 与 x 轴正向的夹角）的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}=\lim_{t\to 0+}\frac{f(0+t\|\boldsymbol{l}\|\cos\alpha,0+t\|\boldsymbol{l}\|\sin\alpha)-f(0,0)}{\|t\boldsymbol{l}\|}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{2\cos\alpha\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=2\cos\alpha\sin^2\alpha\text{。}$$

且易知 $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$。 注意，这个函数在 $(0,0)$ 点并不可微。否则的话，由定理 7.5.1，就得到 f 在 $(0,0)$ 点沿各方向的方向导数皆为零的谬误。

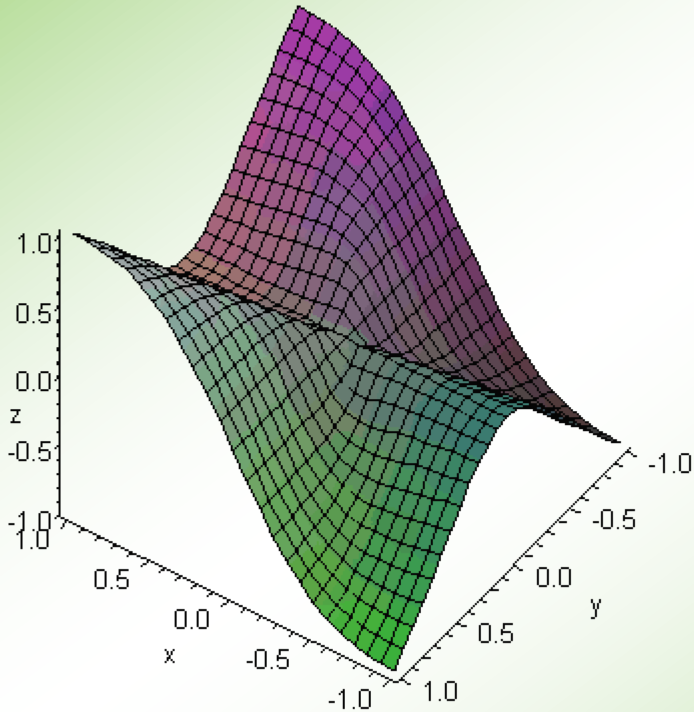

图 7.5.1

图像全景

数量场的梯度

如果在空间区域 D 内的每一点 P，都对应着某物理量的一个确定的值$u(P)$，就称在这空间区域里确定了该物理量的场。如果所对应的是数量，就称这个场为数量场；如果所对应的量是向量，就称这个场为向量场。

例如，在地球表面的每一个地点(x,y,z)，每一个时刻t，均有一个确定的温度T，即

$$T=f(x,y,z,t).$$

这就形成了一个温度场，又如在空间某点处放置一个点电荷，它就在空间形成一个电位场。温度场、电位场、以及密度场等等，都是数量场；而引力场、速度场等都是向量场。

设函数 f 定义于 $\mathbf{R}^n$ 的区域 D 上，或者说 f 是区域 D 上的一个数量场。我们的问题是在点 $P \in D$ 处 f 的方向导数沿哪个方向取得最大值，即沿哪个方向数量场的变化率最大？

前面已经指出，如果向量 $\boldsymbol{l}$ 的方向余弦为 $\cos\alpha_1, \cdots, \cos\alpha_n$，那末 f 在点 P 处沿 $\boldsymbol{l}$ 方向的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\cos\alpha_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\cos\alpha_n \text{。}$$

记 n 维向量

$$\boldsymbol{g} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right),$$

又记 $\boldsymbol{l}$ 方向的单位向量为 $\boldsymbol{l}_0$，则 $\boldsymbol{l}_0 = (\cos\alpha_1, \cdots, \cos\alpha_n)$，于是

$$\frac{\partial f}{\partial l}=(\boldsymbol{g},\boldsymbol{l}_0)。$$

上式右端表示向量$\boldsymbol{g}$与$\boldsymbol{l}_0$的内积。由 **Schwarz** 不等式，

$$\left|\frac{\partial f}{\partial l}\right|=|(\boldsymbol{g},\boldsymbol{l}_0)|\le\|\boldsymbol{g}\|\|\boldsymbol{l}_0\|=\|\boldsymbol{g}\|。$$

另一方面，当且仅当$\boldsymbol{g}$与$\boldsymbol{l}_0$同向时

$$(\boldsymbol{g},\boldsymbol{l}_0)=\|\boldsymbol{g}\|。$$

所以，当且仅当$\boldsymbol{l}_0$与$\boldsymbol{g}$同向时，$\frac{\partial f}{\partial l}$最大，而且

$$\max\frac{\partial f}{\partial l}=\|\boldsymbol{g}\|=\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

这里的n维向量$\boldsymbol{g}$实际上就是下面要讨论的梯度。

定义 7.5.2 设 f 是 R^n 中区域 D 上的数量场，如果 f 在 $P_0 \in D$ 处可微，称向量

$$\left.\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)\right|_{P_0}$$

为 f 在 P_0 处的**梯度**，记作 $\mathbf{grad} f(P_0)$。

由前面的讨论可知，如果 f 在 P_0 处可微，$\boldsymbol{l}_0$ 是与 $\boldsymbol{l}$ 同向的单位向量，则

$$\frac{\partial f}{\partial l} = (\mathbf{grad} f, \boldsymbol{l}_0)。$$

当 $\mathbf{grad} f$ 与 $\boldsymbol{l}_0$ 同向时，$\frac{\partial f}{\partial l}$ 达到最大，即 f 在 P_0 处的方向导数在其梯度方向上达到最大值，此最大值即梯度的范数 $\|\mathbf{grad} f\|$。这就是说，沿梯度方向，函数值增加最快。同样可知，方向导数的最小值在梯度的相反方向取得，此最小值即 $-\|\mathbf{grad} f\|$，从而沿梯度相反方向函数值的减少最快。

例 7.5.2 设在空间直角坐标系的原点处有一个点电荷q，由此产生一个静电场，在点(x,y,z)处的电位是

$$V=\frac{q}{r},$$

其中$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$。这样，V是$\mathbf{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$上的一个数量场，其梯度为

$$\mathbf{grad}V=-\frac{q}{r^2}\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{r}=-\frac{q}{r^3}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})。$$

由此可见，这个静电场的电场强度$\boldsymbol{E}$与电位V的关系是

$$\boldsymbol{E}=-\mathbf{grad}V。$$

根据梯度的定义，不难验证它具有下列运算性质：

1. $\mathbf{grad}c = 0$，其中 c 为常数；

2. $\mathbf{grad}(\alpha f + \beta g) = \alpha\mathbf{grad}f + \beta\mathbf{grad}g$，其中 α, β 为常数；

3. $\mathbf{grad}(f \cdot g) = f \cdot \mathbf{grad}g + g \cdot \mathbf{grad}f$ ；

4. $\mathbf{grad}\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{g \cdot \mathbf{grad}f - f \cdot \mathbf{grad}g}{g^2}$，其中 $g \neq 0$；

5. $\mathbf{grad}(f \circ g) = f'(u)\mathbf{grad}g$，其中 $u = g(\boldsymbol{x})$， $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$ 。

等值面的法向量

在稳定的温度场中，温度相等的点组成一张曲面，称为等温面。气压场中，大气压强相同的点组成一张曲面，称为某压面。一般地，设有$\mathbf{R}^3$中的一个数量场：

$$f(x,y,z)\text{，}\quad (x,y,z)\in D\text{。}$$

函数f取值相同的点组成的曲面称为**等值面**。等值面的方程为

$$f(x,y,z)=c\text{，}$$

其中c是某常数。

例如$f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$的等值面是一个球面。当$f(x,y,z)=z-\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}$时，等值面$f(x,y,z)=1$如图 **7.5.2** 所示，它是一张抛物面。

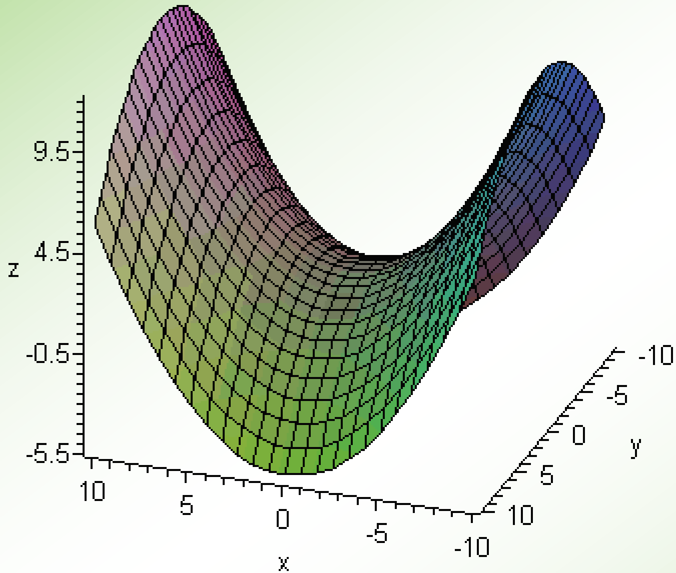

图 7.5.2

以下我们假设 f 有连续偏导数，且其偏导数不同时为 **0**。

由上一节关于曲面切平面的讨论可知，在等值面 $f(x,y,z)=c$ 上的点 P_0 处，其中一个法向量为

$$\boldsymbol{n}=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)\bigg|_{P_0},$$

这个量恰为 $\mathbf{grad}f(P_0)$，因此，

$$\frac{\partial f}{\partial n}=\|\,\mathbf{grad}f\,\|。$$

又记 $\boldsymbol{n}_0=\dfrac{\boldsymbol{n}}{\|\boldsymbol{n}\|}$，即 $\boldsymbol{n}_0$ 为单位法向量，则有

$$\mathbf{grad}f=\frac{\partial f}{\partial n}\boldsymbol{n}_0,$$

这就是说，梯度方向为等值面的一个法线方向，梯度大小即 f 沿等值面的一个法线方向的方向导数。

值得注意的是，因为等值面及其法向与坐标选择无关，所以梯度与坐标的选取无关。更一般地，$\mathbf{R}^n$ 上数量场的梯度与坐标的选取无关。

势量场

对于给定的空间区域 $D \subset \mathbf{R}^n$ 上的数量场 f，其梯度 $\mathbf{grad}f$ 是 D 上的一个向量场。反过来我们有以下概念。

定义 7.5.3 设 $\boldsymbol{V}$ 是区域 D 上的向量场，如果存在某数量场 U，使得

$$\boldsymbol{V} = \mathbf{grad}\,U ,$$

则称该向量场 $\boldsymbol{V}$ 为**势量场**，称 U 为 $\boldsymbol{V}$ 的一个**势函数**。

显然，当势函数存在时，它并不是唯一的。

例 7.5.3 引力场是一个势量场。

设在坐标原点处有质量m，由此产生一个引力场。引力场的方向指向原点，对单位质量质点的引力大小为$\frac{km}{r^2}$，其中k为引力常数，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$。这样，引力场可以表述为

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=-\frac{km}{r^3}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})\ 。$$

容易验证：函数

$$U(x,y,z)=\frac{km}{r}$$

是它的一个势函数。实际上

$$(U'_x,U'_y,U'_z)=\left(-\frac{kmx}{r^3},-\frac{kmy}{r^3},-\frac{kmz}{r^3}\right),$$

因此

$$\boldsymbol{F}=\mathbf{grad}U\ 。$$