

复旦大学数学科学学院  
2011~2012 学年第一学期期末考试试卷

A 卷

课程名称: 高等数学 A (上) 课程代码: MATH120001

开课院系: 数学科学学院 考试形式: 闭卷

姓 名: \_\_\_\_\_ 学 号: \_\_\_\_\_ 专 业: \_\_\_\_\_

题 号	1	2	3	4	5	6	7	总 分
得 分								

1. (本题满分 48 分, 每小题 6 分) 计算下列各题:

(1) 求曲线  $e^{2x+y} - \cos(xy) = e - 1$  在点  $(0, 1)$  处的切线方程;

(2) 求极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{\ln(x^3+1)}}$ ;

(装订线内不要答题)

(3) 设函数  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 2$  在  $x = 1$  点取极小值 0, 且该函数的图像以  $(0, 2)$  为拐点, 求  $a, b, c$  的值。

(4) 设一元函数  $f$  满足  $\int xf(x)dx = \arcsin x + C$  ( $C$  是任意常数), 求  $\int \frac{1}{f(x)}dx$ ;

(5) 求定积分  $\int_{-\pi}^{\pi} (\sqrt{1 + \cos 2x} + |x| \sin^3 x) dx$ ;

(6) 若  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+a}{x-a} \right)^x = \int_{-\infty}^a x e^{2x} dx$ , 求常数  $a$ ;

(7) 已知  $\mathbf{a}_1 = (2, 4, 0)$ ,  $\mathbf{a}_2 = (-2, 1, 1)$ ,  $\mathbf{a}_3 = (4, -1, t)$ , 问  $t$  为何值时,  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  线性相关?

(8) 已知  $\mathbf{R}^3$  中的两组基为

$$\mathbf{a}_1 = (1, 1, -1)^T, \mathbf{a}_2 = (1, -1, 1)^T, \mathbf{a}_3 = (-1, 1, 1)^T,$$

和

$$\mathbf{b}_1 = (1, 1, 1)^T, \mathbf{b}_2 = (0, 1, 1)^T, \mathbf{b}_3 = (0, 0, 1)^T,$$

求从基  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$  到基  $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$  的过渡矩阵。

2. (本题满分 8 分) 求点  $(0, 1)$  到曲线  $y = x^2 - x$  的最短距离。

3. (本题满分 8 分) 求曲线  $y = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6x(e^{nx} - \sin e^{nx})}{(1+x^2)e^{3nx}}$  ( $x \in (-\infty, +\infty)$ ) 与两条直线  $y = \frac{1}{2}x$  和  $x = 1$  所围平面图形的面积。

4. (本题满分 9 分) 问  $\lambda$  为何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} (2-\lambda)x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + (5-\lambda)x_2 - 4x_3 = 2, \\ -2x_1 - 4x_2 + (5-\lambda)x_3 = -\lambda - 1 \end{cases}$$

有唯一解、无穷多解、无解? 请说明理由。

5. (本题满分 10 分) 设  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 2 \end{pmatrix}$ 。

(1) 求  $\mathbf{A}$  的特征值和特征向量;

(2) 问  $\mathbf{A}$  是否相似于对角矩阵? 若是, 求正交矩阵  $\mathbf{S}$ , 使得  $\mathbf{S}^T \mathbf{A} \mathbf{S}$  为对角矩阵;

(3) 问  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  是否相似? 请说明理由。

6. (本题满分 9 分) 设  $f(x) = \int_0^x (t - t^2) \sin^{2n} t dt$  ( $n$  是正整数), 证明: 当  $x \geq 0$  时成立

$$f(x) \leq \frac{1}{(2n+2)(2n+3)}.$$

7. (本题满分 8 分) 设  $1 < a < b$ ,  $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$ , 证明

$$0 < f(b) - f(a) \leq \frac{1}{4}(b - a).$$

。