

复旦大学数学科学学院
2015~2016 学年第一学期期末考试试卷

A 卷

课程名称: 《高等数学 A (I)》 课程代码: MATH120021

开课院系: 数学科学学院 考试形式: 闭卷

姓名: _____ 学号: _____ 专业: _____

题号	1	2	3	4	5	6	7	总分
得分								

1. (本题满分 40 分, 每小题 5 分) 计算下列各题:

(1) 确定常数 b , 使得直线 $y = 9x + b$ 为曲线 $y = x^3 - 3x$ 的切线;

(2) 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 3x + 1)}{\ln(x^3 + 2x + 1)}$;

(装订线内不要答题)

(3) 求函数 $f(x) = (x+1)\ln(x+1)$ 的单调区间和极值;

(4) 求不定积分 $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^4}} dx$;

(5) 设 $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & 1 < x, \end{cases}$ 求 $\int_2^4 f(x-2)e^{-x} dx$;

(6) 问反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos^3 x}{(x+2e^{-3x})\sqrt{1+x}} dx$ 是否收敛? 请说明理由;

(7) 求矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -4 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵;

(8) 求经过原点, 且与两平面 $x+2y+3z-13=0$ 和 $3x+y-z-1=0$ 都垂直的平面的方程。

2. (本题满分 10 分) 问方程 $2x^3 - 3x^2 + \frac{1}{2} = 0$ 有几个实根? 请说明理由。

3. (本题满分 10 分) 要制作一个体积为 V 的圆柱形无盖铁桶, 问如何确定其底面半径和高才能用料最省?

4. (本题满分 10 分) 设函数 f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有连续二阶导数, 且满足方程

$$xf'(x) = f(x) + 140x^6.$$

(1) 求 $f(x)$ 的表达式;

(2) 问曲线 $y = f(x)$ 是否有拐点? 请说明理由。

(3) 是否存在函数 f , 它在开区间 $(0, 1)$ 上大于零, 并满足上面的方程, 且曲线 $y = f(x)$ ($x \in [0, 1]$) 与直线 $x = 1$ 和 $y = 0$ 所围的图形 D 的面积为 2? 请说明理由。

5. (本题满分 10 分) 若 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^4 + 3} - [A + B(x-1) + C(x-1)^2]}{(x-1)\sin(x-1)} = 0$, 求常数 A, B, C 。

6. (本题满分 10 分) 证明: $\int_0^1 \left(1 + \sin \frac{\pi}{2} x\right)^n dx > \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$ ($n = 1, 2, \dots$);

(2) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_0^1 \left(1 + \sin \frac{\pi}{2} x\right)^n dx \right]^{\frac{1}{n}}$ 。

7. (本题满分 10 分) 设过点 $(-1, c, c)$ 的直线 L 的方程为 $\begin{cases} cx + y + z = c, \\ x - cy + cz = -1, \end{cases}$ 其中 c 为实数。

(1) 求直线 L 的对称式方程;

(2) 当 c 连续变化时, L 随之移动而生成曲面 Σ , 求曲面 Σ 与平面 $z = t$ 的交线的方程, 其中 t 为常数;

(3) 求由曲面 Σ , 平面 $z = 0$ 和 $z = 1$ 所围立体的体积。