姓　名：________　学　号：________　专　业：________

（装订线内不要答题）

复旦大学数学科学学院

2016～2017 学年第一学期期末考试试卷

A 卷

课程名称：高等数学 A（上）　　　课程代码：________

开课院系：数学学院　　　　　　　考试形式：闭卷

题　号	1	2	3	4	5	6	7	总　分
得　分								

一.简答题（本题共 40 分，每小题 5 分）

1.求 $y = e^{2x}\sin 3x$ 的二阶导数；

解：$y' = e^{2x}(2\sin 3x + 3\cos 3x)$，$y'' = e^{2x}(12\cos 3x - 5\sin 3x)$。

2.计算 $\int \dfrac{2x+6}{x^2+2x+5}dx$；

解：原式=$\int \dfrac{2x+2}{x^2+2x+5}dx + 4\int \dfrac{1}{x^2+2x+5}dx$

$= \ln(x^2+2x+5) + 2\arctan\dfrac{x+1}{2} + c$

3.计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt[4]{n^2+1})$；

解：原式=$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}((n+1)^2-(n^2+1))}{(\sqrt{n+1}+\sqrt[4]{n^2+1})(n+1+\sqrt{n^2+1})} = \dfrac{1}{2}$。

4.求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\sin 2x}\ln(1+t)dt}{x\ln(1+x)}$；

解：原式=$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\sin 2x}\ln(1+t)dt}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin 2x)\cdot 2\cos 2x}{2x} = 2$。

5.计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 & -2 \\ 1 & -3 & 2 & -2 \end{vmatrix}$；

解：原式$= -9$。

6.设矩阵 A, B 满足 $2AB = 3A + B$，其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，求矩阵 B；

解：$(2A - I)B = 3A$，$2A - I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，$(2A - I)^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$，

所以 $B = 3(2A - I)^{-1} A = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 6 \\ 3 & 3 & -3 \\ -6 & -3 & 9 \end{pmatrix}$。

7.求函数 $y = x^4 - 8x^2$ 的极值;

解： 易知 $y' = 4x^3 - 16x$，驻点为 $x = 0, 2, -2$，利用 $y'' = 12x^2 - 16$ 的符号，可知 $x = 0$ 是极大值点，$x = \pm 2$ 是极小值点，$y_{极大} = 0, y_{极小} = -16$。

8. 计算 $\int_1^{+\infty} \frac{4x + 2}{x^2(1 + x^2)} dx$。

解：原式=$\int_1^{+\infty} \left(\frac{4x + 2}{x^2} - \frac{4x + 2}{1 + x^2} \right) dx = 2 - \frac{\pi}{2} + 2\ln 2$。

二.（本题 10 分）求由 $x^2 + y^2 = a^2$ 与 $y^2 + z^2 = a^2$ 所围立体在第一卦限部分的体积。

解：过 x 轴上点 x 处，作平行与 yoz 面的平面截立体的截面为正方形，

边长为 $\sqrt{a^2 - x^2}$，

所以体积 $V = \int_0^a (a^2 - x^2) dx = \frac{2}{3} a^3$。

三.（本题 10 分）设 $f(x) = \begin{cases} (1 + x)^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0 \\ e, & x = 0 \end{cases}$，求 $f^{(4)}(0)$ 的值。

解： $f(x) = e \exp\{ \frac{\ln(1 + x) - x}{x} \}$

$$= e \left[1 + \frac{\ln(1 + x) - x}{x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\ln(1 + x) - x}{x} \right)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{\ln(1 + x) - x}{x} \right)^3 + \frac{1}{24} \left(\frac{\ln(1 + x) - x}{x} \right)^4 \right] + o(x^4)$$

$$= e \left[1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{5}x^4 + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + o(x^3) \right)^2 \right]$$

$$+e\left[+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+o(x^2)\right)^3+\frac{1}{24}\left(-\frac{1}{2}x+o(x)\right)^4\right]+o(x^4)$$

$$=e\left[1-\frac{1}{2}x+\frac{11}{24}x^2-\frac{7}{16}x^3+\frac{1}{24}\frac{2447}{240}x^4\right]+o(x^4),$$

所以 $f^{(4)}(0)=\dfrac{2447}{240}e$。

四.（本题 10 分）求不定积分 $\displaystyle\int\frac{1}{\sin^4 x\cos^4 x}dx$。

解: 原式 $\displaystyle=\int\frac{\sec^8 x}{\tan^4 x}dx=\int\frac{(\tan^2 x+1)^3}{\tan^4 x}d\tan x$

$$=\frac{1}{3}(\tan^3 x-\cot^3 x)+3(\tan x-\cot x)+c\ 。$$

五.（本题 10 分）将直线 $l:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z}{2}$ 绕直线 $l_1:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$ 旋转一周可得一个旋转曲面，求此旋转曲面的方程。

解：设 Σ 是所求曲面，任取 $\mathrm{P}(x,y,z)\in\Sigma$，则 P 点由直线 l 上某点 $\mathrm{Q}(x_0,y_0,z_0)$ 旋转所得，于是由点到直线的距离公式，可得

$$\frac{(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2}{3}=\frac{(y_0-z_0)^2+(z_0-x_0)^2+(x_0-y_0)^2}{3},$$

又 $PQ\perp l_1$，所以 $x-x_0+y-y_0+z-z_0=0$，利用 $\begin{cases}x_0=2t+1\\ y_0=-t-1\\ z_0=2t\end{cases}$

可得 $xy+yz+zx+x+y+z+1=0$，这就是所求的旋转曲面的方程。

六.（本题 10 分）求使得下式成立的最小的 α：

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}>e,n=1,2,\cdots$$

解: 问题化为 $\alpha>\dfrac{1}{\ln(1+\frac{1}{n})}-n,\ \forall n$,

记 $f(x)=\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x},\ x\in(0,1]$,

则 $f'(x)=-\dfrac{1}{\ln^2(1+x)}\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{(1+x)\ln^2(1+x)-x^2}{x^2(1+x)\ln^2(1+x)}$,

记 $g(x)=(1+x)\ln^2(1+x)-x^2$，

则 $g'(x)=\ln^2(1+x)+2\ln(1+x)-2x, g''(x)=\dfrac{2\ln(1+x)-2x}{1+x}<0$，

于是 $g'(x)$ 严格递减，当 $x\in(0,1]$，$g'(x)<g'(0)=0$，

推出 $g(x)$ 严格递减，当 $x\in(0,1]$，$g(x)<g(0)=0$，即得 $f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 严格递减，$f(x)<\lim\limits_{x\to o+0}f(x)=\dfrac{1}{2}$，$x\in(0,1]$，

这表明，满足条件的最小的 $\alpha=\dfrac{1}{2}$。

七.（本题 10 分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 可导，$f(0)=0, f(1)=1$，证明：对任意的三个正数 a,b,c，存在三个不同的数 $x_i\in(0,1), i=1,2,3$，使得

$$\frac{a}{f'(x_1)}+\frac{b}{f'(x_2)}+\frac{c}{f'(x_3)}=a+b+c。$$

证: 对任意的三个正数 a,b,c，$0<\dfrac{a}{a+b+c}<\dfrac{a+b}{a+b+c}<1$，由连续函数介值定理，

$\exists p,q\in(0,1), p<q$，使得 $f(p)=\dfrac{a}{a+b+c}, f(q)=\dfrac{a+b}{a+b+c}$，

在 $[0,p],[p,q],[q,1]$ 上分别对 $f(x)$ 用 Lagrange 中值定理，

$\exists x_1\in(0,p), x_2\in(p,q), x_3\in(q,1)$，使得

$$f(p)-f(0)=f'(x_1)p,\ f(q)-f(p)=f'(x_2)(q-p),\ f(1)-f(q)=f'(x_3)(1-q),$$

所以 $$\frac{a}{f'(x_1)}+\frac{b}{f'(x_2)}+\frac{c}{f'(x_3)}=a+b+c。$$