

复旦大学数学科学学院

2014~2015 学年第二学期期末考试试卷

A 卷

课程名称: 高等数学 B (下) 课程代码: MATH120004

开课院系: 数学科学学院 考试形式: 闭卷

题号	1	2	3	4	5	6	总分
得分							

1. 选择题 (3分×4=12分)

- 1) “函数 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处存在偏导数”是“函数 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处可微”的_____。
A. 必要条件 B. 充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分, 也不必要条件
- 2) 已知 $(0, 0)$ 是函数 $f(x, y) = x^2 + xy - y^2$ 的驻点, 则 $f(0, 0)$ 为 $f(x, y)$ 的_____。
A. 极大值 B. 极小值 C. 非极值 D. 以上都不对
- 3) 二次积分 $\int_0^2 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy$ 的另一种积分次序为_____。
A. $\int_0^4 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$ B. $\int_0^4 dy \int_{\sqrt{y}}^2 f(x, y) dx$
C. $\int_0^4 dy \int_{y^2}^2 f(x, y) dx$ D. $\int_0^4 dy \int_2^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$
- 4) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ 收敛, 则_____。
A. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n|$ 收敛
B. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛
C. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 中至少有一个收敛
D. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 要么都收敛, 要么都发散

专业: _____
学号: _____
姓名: _____

(装订线内不要答题)

2. 计算题 (6分×7=42分)

1) 设 $z = y \cdot \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

2) 求曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ 和 $x + y + z = 0$ 的交线在点 $(1, -2, 1)$ 处的切线方程.

3) 设 n 是曲面 $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 6$ 在点 $P(1,1,1)$ 处指向外侧的法向量, 求函数 $u = \frac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z}$ 在 P 点沿方向 n 的方向导数.

4) 计算 $\iint_{\Omega} |x - y| dx dy$, 其中 $\Omega = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$.

5) 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{na^n}$ ($a > 0$) 的敛散性.

6) 把 $f(x) = 1 - x$ 在 $[0, 2]$ 上展开成余弦级数.

7) 求微分方程 $y' + xy + x^3 = 0$ 的通解.

3. (10分) 在平面 $3x - 2z = 0$ 上求一点 P, 使得 P 与点 A(1,1,1)、点 B(2,3,4)的距离平方和最小.

4. (10 分) 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} z e^{-(x^2+y^2+z^2)} dx dy dz$, 其中 Ω 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 所围成的闭区域.

5. (12 分)

1) 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} x^{2n}$ 的和函数.

2) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2 \cdot 1} + \frac{5}{2^2 \cdot 2!} + \frac{7}{2^3 \cdot 3!} + \cdots + \frac{2n+1}{2^n \cdot n!} \right)$.

6. (14分) 已知二阶可微函数 $f(x)$ ($x \geq -1$) 满足条件

$$f'(x) + f(x) - \frac{1}{x+1} \int_0^x f(t) dt = 0 \text{ 以及 } f(0) = 1$$

1) 求 $f'(x)$.

2) 证明当 $x \geq 0$ 时, $e^{-x} \leq f(x) \leq 1$.