

复旦大学数学科学学院

2013~2014 学年第一学期期末考试试卷

《高等数学 C》(上) A 卷试题答案

1. (本题满分 48 分, 每小题 6 分) (1) $\frac{\sin(\ln x) - \cos(\ln x)}{x^2}$; (2) $\frac{1}{6}$;

(3) 在 $[1, e^2]$ 上单调增加, 在 $(0, 1]$ 和 $[e^2, +\infty)$ 上单调减少。 $f(1) = 0$ 极小值,

$f(e^2) = \frac{4}{e^2}$ 极大值; (4) $(0, 0)$; (5) $\frac{1}{2}\sin(2e^x) + C$; (6) $\frac{1}{2}$;

(7) 可逆, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$; (8) $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 。

2. (本题满分 10 分) $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3, & x \in [0, 1), \\ x^2 - \frac{2}{3}, & x \in [1, 2]. \end{cases}$ $F(x)$ 在 $x=1$ 点不可导。

3. (本题满分 12 分) (1) $y = 4x - 3$ ((0, -3) 点) $y = -2x + 6$ ((3, 0) 点);

(2) $\frac{9}{4}$ 。

4. (本题满分 10 分) $a < -\frac{1}{e}$ 时无实根; $a = -\frac{1}{e}$ 时有一个实根; $-\frac{1}{e} < a < 0$ 时有两个实根; $a \geq 0$ 时有一个实根。

5. (本题满分 10 分) $f(a)$ 为极小值。

6. (本题满分 10 分) (1) $\int_0^\pi \frac{1}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$, $\int_0^\pi \frac{\sin^2 x}{1 + \cos^2 x} dx = (\sqrt{2} - 1)\pi$;

(2) 取 $n = \left[\frac{x}{\pi} \right]$, 则

$$\int_0^x \frac{1}{1 + \cos^2 t} dt = \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{1}{1 + \cos^2 t} dt + \int_{k\pi}^x \frac{1}{1 + \cos^2 t} dt,$$

于是

$$\frac{n\pi}{\sqrt{2}} \leq \int_0^x \frac{1}{1+\cos^2 t} dt \leq \frac{(n+1)\pi}{\sqrt{2}}。$$

同理

$$(\sqrt{2}-1)n\pi \leq \int_0^x \frac{\sin^2 t}{1+\cos^2 t} dt \leq (\sqrt{2}-1)(n+1)\pi。$$

于是

$$\frac{n}{n+1}(2-\sqrt{2}) \leq \frac{\int_0^x \frac{\sin^2 t}{1+\cos^2 t} dt}{\int_0^x \frac{1}{1+\cos^2 t} dt} \leq \frac{n+1}{n}(2-\sqrt{2})，$$

令 $x \rightarrow +\infty$ 便得结论。