

周上求一点 C ，使 $\triangle ABC$ 面积 S_{Δ} 最小。(提示: $S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$) (8%)

解答: 当 $C(\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}})$ 时, 使 $\triangle ABC$ 面积 S_{Δ} 最小。

五. 计算 $I = \iint_D |y - x^2| d\sigma$ 其中 $D = \{-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ (8%)

解答: $I = \iint_D |y - x^2| d\sigma = \frac{11}{15}$

六. 设一元函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 证明

$$\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} (x-y)^{n-2} f(x) dx = \frac{1}{n-1} \int_0^1 (x-x^2)^{n-1} f(x) dx \quad (8\%)$$

证明: $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} (x-y)^{n-2} f(x) dx = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x (x-y^2)^{n-2} f(x) dy$
 $= \int_0^1 f(x) \left(\frac{-(x-y)^{n-1}}{n-1} \Big|_{x^2}^x \right) dx = \text{右式}$

七. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{3n}}$ $x > 0$ 的敛散性。 (8%)

解答: $\because \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{x^n}{1+x^{3n}}} = \frac{x}{\max(1, x^3)} < 1$ ($x \neq 1$) 收敛 (Cauchy 判别法)

当 $x = 1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}$ 发散

八. 将函数 $f(x) = \arctan \frac{1-2x}{1+2x}$ 展开成 x 的幂级数, 并求 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和。 (8%)

解答: $f(x) = \arctan \frac{1-2x}{1+2x} = \frac{\pi}{4} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{2n+1} x^{2n+1} \quad x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

九. 若常微分方程 $y'' + ay' + by = \beta e^x$ 有一个特解为 $y = e^{2x} + (1+x)e^x$, 试确定

常数 a, b 与 β 的取值, 并求出该微分方程的通解。 (8%)

$$\text{解答: } \begin{cases} a = -3 \\ b = 2 \\ \beta = -1 \end{cases} \quad GS. \quad y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + x e^x$$

十. 设函数 $f(t)$ 在 _____ 上具有连续导数, 且满足

$$f(t) = e^{\pi t^2} + \iint_{x^2+y^2 \leq t^2} f(\sqrt{x^2+y^2}) d\sigma \quad \text{求 } f(t) \quad (8\%)$$

$$\text{解答: } f(t) = e^{\pi t^2} (\pi t^2 + 1)$$

十一. 一台电子设备内装有 3 个某种类型的电子管。已知这种电子管的寿命 ξ (单位: 小时) 服从如下的指数分布:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1000} e^{-\frac{x}{1000}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

如果有一个电子管损坏 (即此电子管寿命小于电子管的平均寿命 1000 小时), 设备仍能正常工作的概率为 0.80, 若两个及两个以上电子管损坏, 则设备不能正常工作。

(各电子管工作相互独立, $e^{-1} \approx 0.37$)。

求: (1) 电子管损坏的概率。

(2) 求这台电子设备在正常工作 1000 小时后仍能正常工作的概率。(2*7%)

解答: ξ : “电子管的寿命”,

η : “3 个电子管使用 1000 小时后损坏的个数, $\eta \sim B(3, p)$ 其中

$$p = P\{\xi < 1000\}$$

A: “这台电子设备在正常工作 1000 小时后仍能正常工作”

$$(1) \text{ 电子管损坏的概率 } p = P\{\xi < 1000\} = \int_0^{1000} \frac{1}{1000} e^{-\frac{x}{1000}} dx \approx 0.63$$

$$\begin{aligned} (2) P(A) &= P\{\eta = 0\}P\{A|\eta = 0\} + P\{\eta = 1\}P\{A|\eta = 1\} \\ &= C_3^0 (0.63)^0 (0.37)^3 \cdot 1 + C_3^1 (0.63)^1 (0.37)^2 \cdot 0.80 \\ &= 0.258 \end{aligned}$$