高等数学 C 答案 (2016-2017 学年第一学期期末 A 卷)

1. (1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^t+1}$, $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{1}{(\mathrm{e}^t+1)^3}$ (2) $a=1$, $b=-1$ (3) $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\ln 2$ (4) $\dfrac{\pi^2}{2}$ (5) $\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{2}$ (6) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -7 \end{pmatrix}$ (7) $p<4$

2. 设 $f(x)=x\arctan x-\ln(1+x^2)$, 则 $f'(x)=\arctan x-\dfrac{x}{1+x^2}$, $f''(x)=\dfrac{2x^2}{(1+x^2)^2}$. 由 $f'(0)=0$ 及 $x>0$ 时 $f''(x)>0$ 得到 $x>0$ 时 $f'(x)>0$, 又由 $f(0)=0$ 得到 $x>0$ 时 $f(x)>0$.

3. (1) $f'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}-3\mathrm{e}^x+1}{(\mathrm{e}^x-1)^2}$, $f''(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x+1)}{(\mathrm{e}^x-1)^3}$. 驻点为 $x_1=\ln\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, $x_2=\ln\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$. 由 $f''(x_1)<0$, $f''(x_2)>0$ 得到 f 在 x_1 取到极大值, 在 x_2 取到极小值.

(2) 由 $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x)=-1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0$ 得到 $f(x)$ 有渐近线 $y=x-1$, $y=x$. 又有垂直渐近线 $x=0$.

4. (1) 根据 Rolle 定理, 由 $f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=0$ 得到存在 $\xi_1\in(1,2)$, $\xi_2\in(2,3)$, $\xi_3\in(3,4)$, 使得 $f'(\xi_i)=0$ $(i=1,2,3)$; 存在 $\eta_1\in(\xi_1,\xi_2)$, $\eta_2\in(\xi_2,\xi_3)$, 使得 $f''(\eta_i)=0$ $(i=1,2)$; 存在 $\zeta\in(\eta_1,\eta_2)$ 使得 $f'''(\zeta)=0$.

(2) 在行列式的第 j 列提出 $(x-j)$ $(j=1,2,3,4)$, 得到

$$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)\cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x+1 & x+2 & x+3 & x+4 \\ x^2+x+1 & x^2+2x+2^2 & x^2+3x+3^2 & x^2+4x+4^2 \\ x^3+x^2+x+1 & x^3+2x^2+2^2x+2^3 & x^3+3x^2+3^2x+3^3 & x^3+4x^2+4^2x+4^3 \end{pmatrix}.$$

第三行乘以 $(-x)$ 加到第四行上, 第二行乘以 $(-x)$ 加到第三行上, 第一行

乘以 $(-x)$ 加到第二行上, 得到

$$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&2^2&3^3&4^2\\1&2^3&3^3&4^3\end{pmatrix}.$$

$$=12(x-1)(x-2)(x-3)(x-4).$$

5. (1)

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(1-x^2)^{3/2}}\overset{x=\sin t}{=}\int\frac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t=\tan t+C=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C$$

(2) 分部积分

$$\int\frac{\arctan x}{(1-x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x=\arctan x\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\int\frac{1}{1+x^2}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$
$$\overset{x=\sin t}{=}\frac{x\arctan x}{\sqrt{1-x^2}}-\int\frac{\sin t}{1+\sin^2 t}\,\mathrm{d}t=\frac{x\arctan x}{\sqrt{1-x^2}}+\int\frac{1}{2-\cos^2 t}\,\mathrm{d}(\cos t)$$
$$=\frac{x\arctan x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}-\sqrt{1-x^2}}+C.$$

6. (1) 对非负整数 k,

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}x\sin^2 x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}(k\pi+x)\sin^2 x\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(k\pi+x)(1+\cos(2x))\,\mathrm{d}x=\frac{\pi^2(2k+1)}{4},$$

所以

$$\int_0^{n\pi}x\sin^2 x\,\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\pi^2(2k+1)}{4}=\frac{\pi^2n^2}{4}.$$

(2) 记 $S_0=\displaystyle\int_0^{\pi}|\sin t|^p\,\mathrm{d}t$, $S_1=\displaystyle\int_0^{\pi}t|\sin t|^p\,\mathrm{d}t$, 则对非负整数 k,

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}x|\sin x|^p\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}(k\pi+x)|\sin x|^p\,\mathrm{d}x=k\pi S_0+S_1,$$

设 $x=(n+\alpha)\pi\ (0\le\alpha<1)$, 则有不等式

$$\begin{aligned}&\frac{\frac{1}{2}n(n-1)\pi S_0+nS_1}{(n+1)^2\pi^2}=\frac{\displaystyle\int_0^{n\pi}t|\sin t|^p\,\mathrm{d}t}{(n+1)^2\pi^2}\le\frac{\displaystyle\int_0^{x}t|\sin t|^p\,\mathrm{d}t}{x^2}\\ \le&\frac{\displaystyle\int_0^{(n+1)\pi}t|\sin t|^p\,\mathrm{d}t}{n^2\pi^2}=\frac{\frac{1}{2}n(n+1)\pi S_0+(n+1)S_1}{n^2\pi^2},\end{aligned}$$

由夹逼性得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\displaystyle\int_0^{x}t|\sin t|\,\mathrm{d}t}{x^2}=\frac{S_0}{2\pi}$$

存在.