复旦大学数学科学学院

2014～2015 学年第二学期期末考试试卷

A 卷

课程名称：高等数学 A（下）　　课程代码：MATH120002

开课院系：数学科学学院　　考试形式：闭卷

题 号	1	2	3	4	5	6	7	总 分
得 分								

1. （本题共 48 分，每小题 6 分）计算下列各题

(1) 设 $z=(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$，求 $z'_x,\ z''_{xy}$。

解：$z'_x=2x(\ln(x^2+y^2)+1)$，$z''_{xy}=\dfrac{4xy}{x^2+y^2}$。

(2) 解方程 $xy'-y=x^2$。

解： 由 $\left(\dfrac{y}{x}\right)'=1$，得 $y=x^2+cx$。

(3) 求函数 $u=xy+zx+yz$ 在点 (1, 1, 1) 处沿方向 $\boldsymbol{l}=(1,-2,2)$ 的方向导数。

解： 由 $u_x=y+z, u_y=x+z, u_z=x+y$，得 $\dfrac{\partial u}{\partial l}=2\cdot\dfrac{1}{3}+2\cdot\dfrac{-2}{3}+2\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{3}$。

(4) 求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在条件 $x+2y+3z=14\ (x,y,z\ge 0)$ 下的极值。

解：作 Lagrange 函数 $L(x,y,z,\lambda)=x^2+y^2+z^2+\lambda(x+2y+3z-14)$，

令 $\begin{cases} L_x=2x+\lambda=0 \\ L_y=2y+2\lambda=0 \\ L_z=2z+3\lambda=0 \\ L_\lambda=x+2y+3z-14=0 \end{cases}$，得 $x=1, y=2, z=3$，为极小值点，$u_{\min}=14$。

(5) 计算 $\iint\limits_D (x+y)dxdy$，其中 $D: x^2+y^2\le 2y$。

解：由对称性，$\iint\limits_D xdxdy=0$，

所以 $\iint\limits_D (x+y)dxdy=\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{2\sin\theta} r^2dr=\pi$。

(6)讨论级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2+1}$的收敛性。

解：注意到$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}=0$，可得$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\ln n}{n^2+1}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}=0$，

由比较判别法，级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2+1}$收敛。

(7)计算$\iint_{\Sigma}(x+y^2)dydz+2yzdzdx+zdxdy$，其中$\Sigma$为曲面$z=x^2+y^2(0\le z\le 1)$的下侧。

解：设有向曲面$\Sigma_1:z=1\ (x^2+y^2\le 1)$，取上侧。

由 Gauss 公式得

$$\iint_{\Sigma+\Sigma_1}(x+y^2)dydz+2yzdzdx+zdxdy=\iiint_{\Omega}(2+2z)dxdydz$$

$$=2\int_0^1(1+z)dz\iint_{\Omega_z}dxdy=2\pi\int_0^1(z+z^2)dz$$

$$=\frac{5}{3}\pi 。$$

而 $\iint_{\Sigma_1}(x+y^2)dydz+2yzdzdx+zdxdy=\iint_{\Sigma_1}dxdy=\pi$，

于是 $\iint_{\Sigma}(x+y^2)dydz+2yzdzdx+zdxdy$

$$=\iint_{\Sigma+\Sigma_1}(x+y^2)dydz+2yzdzdx+zdxdy-\iint_{\Sigma_1}(x+y^2)dydz+2yzdzdx+zdxdy$$

$$=\frac{2}{3}\pi 。$$

(8) 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^n}x^n$的收敛半径与收敛区间。

解： $\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)3^{n+1}}\Big/\frac{1}{n3^n}=\frac{1}{3}$，所以收敛半径$R=3$，

当$x=-3$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(-1)^n$收敛，

当$x=3$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，所以收敛区间为$[-3,3)$。

2.（本题共 8 分）设 f 可微，证明曲面Σ：$f(\frac{z}{y},\frac{x}{z},\frac{y}{x})=0$上任意一点处的切平面过某个定点。

证：任取曲面上一点$P(x_0,y_0,z_0)$，记$g(x,y,z)=f(\frac{z}{y},\frac{x}{z},\frac{y}{x})$，则

$$g(tx,ty,tz)=g(x,y,z),\forall t\neq 0,$$

上式两边对t求导，有 $g'_x(tx,ty,tz)x+g'_y(tx,ty,tz)y+g'_z(tx,ty,tz)z=0$ ，

特别地，有 $g'_x(x_0,y_0,z_0)x_0+g'_y(x_0,y_0,z_0)y_0+g'_z(x_0,y_0,z_0)z_0=0$，

即 曲 面 在 点 处 $P(x_0,y_0,z_0)$ 点 处 的 切 平 面 的 法 向 $(g'_x(x_0,y_0,z_0),g'_y(x_0,y_0,z_0),g'_z(x_0,y_0,z_0))$

与向径(x_0,y_0,z_0)垂直，所以曲面在$P(x_0,y_0,z_0)$点处的切平面一定过原点。

3.（本题共 8 分）求$\int_\Gamma (x+3y^2)ds$，其中$\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\ x+y+z=0\end{cases}(a>0)$。

解：由对称性，$\int_\Gamma xds=\int_\Gamma yds=\int_\Gamma zds$，$\int_\Gamma x^2ds=\int_\Gamma y^2ds=\int_\Gamma z^2ds$，

而$\int_\Gamma (x+y+z)ds=\int_\Gamma 0ds=0$，$\int_\Gamma (x^2+y^2+z^2)ds=\int_\Gamma a^2ds=2\pi a^3$，

所以$\int_\Gamma (x+3y^2)ds=\int_\Gamma (x^2+y^2+z^2)ds=2\pi a^3$。

4.（本题共 10 分） 设$\Sigma:\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1\,(z\geq 0)$，点$P(x,y,z)\in\Sigma$，$\Pi$是$\Sigma$在点$P$处的切平面，$d(x,y,z)$为原点到$\Pi$的距离，求$\iint_\Sigma \frac{z}{d(x,y,z)}dS$。

解：Σ在点$P(x,y,z)$处的切平面Π为 $x(X-x)+y(Y-y)+2z(Z-z)=0$，

或 $xX+yY+2zZ=2$，

于是 $d(x,y,z)=\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+4z^2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+z^2}}$，

由$\Sigma:z=\sqrt{1-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}}$，得 $z_x=-\frac{x}{2z},z_y=-\frac{y}{2z}$，

所以 $\iint\limits_{\Sigma} \frac{z}{d(x,y,z)} dS = \frac{1}{\sqrt{2}} \iint\limits_{\Sigma} z\sqrt{1+z^2} dS = \frac{1}{4} \iint\limits_{\Sigma_{xy}} (4-x^2-y^2) dxdy$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (4-r^2) r dr = \frac{3\pi}{2}。$$

5.（本题共 10 分）设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有连续导数，且 $f(1)=\frac{1}{2}$，曲线积分 $\int_L (yf^2(x)+2x)dx+(xf(x)+y^2)dy$ 在右半平面 $(x>0)$ 与路径无关。

(1)求 $f(x)$ 的表达式；(2)设在右半平面的有向曲线 L 的起点为 $(1,0)$，终点为 $(2,3)$，试计算上述曲线积分。

解：(1)由于曲线积分与路径无关，所以 $f^2(x)=f(x)+xf'(x)$，

这是 Bernoulli 方程，解得 $f(x)=\frac{1}{1+cx}$，由条件 $f(1)=\frac{1}{2}$，得 $c=1$，

所以 $f(x)=\frac{1}{1+x}\ (x>0)$。

(2)这时，被积表达式有原函数 $u(x,y)=x^2-\frac{y}{1+x}+y+\frac{1}{3}y^3$，

所以 $\int_L (yf^2(x)+2x)dx+(xf(x)+y^2)dy = \left(x^2-\frac{y}{1+x}+y+\frac{1}{3}y^3\right)\Big|_{(1,0)}^{(2,3)} = 14$。

6.（本题共 8 分）设 $f(x)=\begin{cases} 1, & x\in[-\pi,0) \\ x, & x\in[0,\pi) \end{cases}$，求其 Fourier 级数及 Fourier 级数的和函数 $S(x)$，并计算 $S(4\pi)$。

解：$a_0=\frac{1}{\pi}(\int_{-\pi}^0 1dx+\int_0^\pi xdx)=1+\frac{\pi}{2}$，

$$a_n=\frac{1}{\pi}(\int_{-\pi}^0 1\cdot\cos nxdx+\int_0^\pi x\cos nxdx)=\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi}, n=1,2,\cdots,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}(\int_{-\pi}^0 1\cdot\sin nxdx+\int_0^\pi x\sin nxdx)=\frac{(-1)^n-1}{n\pi}+\frac{(-1)^{n+1}}{n}, n=1,2,\cdots,$$

所以 $f(x)$ 的 Fourier 级数为

$$f(x)\sim\frac{2+\pi}{4}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos nx+\frac{(-1)^n(1-\pi)-1}{n}\sin nx]。$$

由收敛性定理，可知其和函数

$$S(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(-\pi,0)\cup(0,\pi) \\ \dfrac{1}{2}, & x=0 \\ \dfrac{1+\pi}{2}, & x=\pm\pi \end{cases}$$，而 $S(4\pi)=S(0)=\dfrac{1}{2}$。

7.（本题共 8 分）设$\{a_n\}$为正数列$(a_n>0, n=1,2,\cdots)$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，记$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$，

证明：（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{S_n}$发散；（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{S_n^p}$ 收敛$(p>1)$。

证：（1）不妨设$\dfrac{a_n}{S_n}\to 0(n\to\infty)$，则$\dfrac{S_{n-1}}{S_n}\to 1(n\to\infty)$。

但是 $$\frac{a_n}{S_{n-1}}=\frac{S_n-S_{n-1}}{S_{n-1}}=\int_{S_{n-1}}^{S_n}\frac{1}{S_{n-1}}dx\ge\int_{S_{n-1}}^{S_n}\frac{1}{x}dx=\ln S_n-\ln S_{n-1},$$

于是 $$\sum_{k=2}^{n}\frac{a_k}{S_{k-1}}\ge\ln S_n-\ln S_1\to+\infty(n\to\infty),$$

即 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{a_n}{S_{n-1}}$发散，由比较判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{S_n}$发散。

（2）当$p>1$时，$$\frac{a_n}{S_n^p}=\frac{S_n-S_{n-1}}{S_n^p}=\int_{S_{n-1}}^{S_n}\frac{1}{S_n^p}dx\le\int_{S_{n-1}}^{S_n}\frac{1}{x^p}dx, n=1,2,\cdots,$$

于是 $$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{S_k^p}\le\frac{1}{a_1^{p-1}}+\int_{S_1}^{S_n}\frac{1}{x^p}dx\le\frac{1}{a_1^{p-1}}+\int_{S_1}^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx,$$

即 $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{a_k}{S_k^p}$有界，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{S_n^p}$收敛。