

## 习 题 6.1

求下列不定积分：

$$\int (x^3 + 2x^2 - 5\sqrt{x})dx;$$

$$\int (\sin x + 3e^x)dx;$$

$$\int (x^a + a^x)dx;$$

$$\int (2 + \cot^2 x)dx;$$

$$\int (2\csc^2 x - \sec x \tan x)dx;$$

$$\int (x^2 - 2)^3 dx;$$

$$\int \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx;$$

$$\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + 1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 1\right)dx;$$

$$\int \left(2^x + \frac{1}{3^x}\right)^2 dx;$$

$$\int \frac{2 \cdot 3^x - 5 \cdot 2^x}{3^x} dx;$$

$$\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx;$$

$$\int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx;$$

$$\int (1-x^2)\sqrt{x}\sqrt{x} dx;$$

$$\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx.$$

曲线  $y = f(x)$  经过点  $(e, -1)$ ，且在任一点处的切线斜率为该点横坐标的倒数，求该曲线的方程。

3. 已知曲线  $y = f(x)$  在任意一点  $(x, f(x))$  处的切线斜率都比该点横坐标的立方根少 1，

(1) 求出该曲线方程的所有可能形式，并在直角坐标系中画出示意图；

(2) 若已知该曲线经过  $(1, 1)$  点，求该曲线的方程。

## 习 题 6.2

求下列不定积分：

$$\int \frac{dx}{4x-3};$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x^2}};$$

$$\int \frac{dx}{e^x - e^{-x}};$$

$$\int e^{3x+2} dx;$$

$$\int (2^x + 3^x)^2 dx;$$

$$\int \frac{1}{2+5x^2} dx;$$

$$\int \sin^5 x dx;$$

$$\int \tan^{10} x \sec^2 x dx;$$

$$\int \sin 5x \cos 3x dx;$$

$$\int \cos^2 5x dx;$$

$$\int \frac{(2x+4)dx}{(x^2+4x+5)^2};$$

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx;$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[4]{1-2x^3}};$$

$$\int \frac{1}{1-\sin x} dx;$$

$$\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} dx;$$

$$\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}};$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 2};$$

$$\int \frac{1-x}{\sqrt{9-4x^2}} dx;$$

$$\int \tan \sqrt{1+x^2} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx;$$

$$\int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^4 x} dx.$$

求下列不定积分：

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}};$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}};$$

$$\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx;$$

$$\int \frac{1+\ln x}{(x \ln x)^2} dx.$$

$$\int (x-1)(x+2)^{20} dx;$$

$$\int x^2(x+1)^n dx;$$

$$\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{1+x^2}};$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} dx;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}};$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}};$$

$$\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}} dx;$$

$$\int x \sqrt{\frac{x}{2a-x}} dx;$$

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{2x}};$$

$$\int x^2 \sqrt[3]{1-x} dx;$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}};$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} dx;$$

$$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4} dx;$$

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-x^2}};$$

$$\int \frac{x^{15}}{(x^4 - 1)^3} dx;$$

$$\int \frac{1}{x(x^n + 1)} dx;$$

求下列不定积分：

$$\int x e^{2x} dx;$$

$$\int x \ln(x-1) dx;$$

$$\int x^2 \sin 3x dx;$$

$$\int \frac{x}{\sin^2 x} dx;$$

$$\int x \cos^2 x dx;$$

$$\int \arcsin x dx;$$

$$\int \arctan x dx;$$

$$\int x^2 \arctan x dx;$$

$$\int x \tan^2 x dx;$$

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x}} dx;$$

$$\int \ln^2 x dx;$$

$$\int x^2 \ln x dx;$$

$$\int e^{-x} \sin 5x dx;$$

$$\int e^x \sin^2 x dx;$$

$$\int \frac{\ln^3 x}{x^2} dx;$$

$$\int \cos(\ln x) dx;$$

$$\int (\arcsin x)^2 dx;$$

$$\int \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} dx;$$

$$\int e^{\sqrt{x+1}} dx;$$

$$\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx.$$

4. 已知  $f(x)$  的一个原函数为  $\frac{\sin x}{1+x \sin x}$ , 求  $\int f(x) f'(x) dx$ 。

5. 设  $f'(\sin^2 x) = \cos 2x + \tan^2 x$ , 求  $f(x)$ 。

6. 设  $f(\ln x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ , 求  $\int f(x) dx$ 。

7. 求不定积分  $\int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$  与  $\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$ 。

8. 求下列不定积分的递推表达式 ( $n$  为正整数):

$$I_n = \int \sin^n x dx;$$

$$I_n = \int \tan^n x dx;$$

$$I_n = \int \frac{dx}{\cos^n x};$$

$$I_n = \int x^n \sin x dx;$$

$$I_n = \int e^x \sin^n x dx;$$

$$I_n = \int x^\alpha \ln^n x dx;$$

$$I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$I_n = \int \frac{dx}{x^n \sqrt{1+x}}.$$

9. 导出求  $\int \frac{(ax+b)dx}{x^2+2\xi x+\eta^2}$ ,  $\int \frac{(ax+b)dx}{\sqrt{x^2+2\xi x+\eta^2}}$  和  $\int (ax+b)\sqrt{x^2+2\xi x+\eta^2} dx$  型不定积

分的公式。

10. 求下列不定积分:

$$\int (5x+3)\sqrt{x^2+x+2} dx;$$

$$\int (x-1)\sqrt{x^2+2x-5} dx;$$

$$\int \frac{(x-1)dx}{\sqrt{x^2+x+1}};$$

$$\int \frac{(x+2)dx}{\sqrt{5+x-x^2}}.$$

11. 设  $n$  次多项式  $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ , 系数满足关系  $\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{(i-1)!} = 0$ , 证明不定积分

$\int p\left(\frac{1}{x}\right)e^x dx$  是初等函数。

### 习 题 6.3

求下列不定积分:

$$\int \frac{dx}{(x-1)(x+1)^2};$$

$$\int \frac{2x+3}{(x^2-1)(x^2+1)} dx;$$

$$\int \frac{x dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3};$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+4x+4)(x^2+4x+5)^2};$$

$$\int \frac{3}{x^3+1} dx;$$

$$\int \frac{dx}{x^4+x^2+1};$$

$$\int \frac{x^4+5x+4}{x^2+5x+4} dx;$$

$$\int \frac{x^3+1}{x^3+5x-6} dx;$$

$$\int \frac{x^2}{1-x^4} dx;$$

$$\int \frac{dx}{x^4+1};$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x+1)};$$

$$\int \frac{x^2+1}{x(x^3-1)} dx;$$

$$\int \frac{x^2+2}{(x^2+x+1)^2} dx;$$

$$\int \frac{1-x^7}{x(1+x^7)} dx;$$

$$\int \frac{x^9}{(x^{10}+2x^5+2)^2} dx;$$

$$\int \frac{x^{3n-1}}{(x^{2n}+1)^2} dx.$$

在什么条件下,  $f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{x(x+1)^2}$  的原函数仍是有理函数?

设  $p_n(x)$  是一个  $n$  次多项式, 求

$$\int \frac{p_n(x)}{(x-a)^{n+1}} dx.$$

求下列不定积分:

$$\int \frac{x}{\sqrt{2+4x}} dx ;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} ;$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x-x^2}} dx ;$$

$$\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}} dx ;$$

$$\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} dx ;$$

$$\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx ;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}} ;$$

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}} ;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+4}\sqrt{x}} ;$$

$$\int \sqrt[3]{\frac{(x-4)^2}{(x+1)^8}} dx.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)(x+1)^2}} ;$$

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^4}} ;$$

设  $R(u, v, w)$  是  $u, v, w$  的有理函数, 给出

$$\int R(x, \sqrt{a+x}, \sqrt{b+x}) dx$$

的求法。

求下列不定积分:

$$\int \frac{dx}{4+5\cos x} ;$$

$$\int \frac{dx}{2+\sin x} ;$$

$$\int \frac{dx}{3+\sin^2 x} ;$$

$$\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x} ;$$

$$\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x+5} ;$$

$$\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x} ;$$

$$\int \frac{dx}{\tan x+\sin x} ;$$

$$\int \frac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)} ;$$

$$\int \tan x \tan(x+a) dx ;$$

$$\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} dx ;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} ;$$

求下列不定积分：

$$\int \frac{x e^x}{(1+x)^2} dx ;$$

$$\int \ln^2(x + \sqrt{1+x^2}) dx ;$$

$$\int x^2 e^x \sin x dx ;$$

$$\int \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx ;$$

$$\int \arctan \sqrt{x} dx ;$$

$$\int \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} dx ;$$

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} dx ;$$

$$\int \frac{dx}{e^x - e^{-x}} ;$$

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})} dx ;$$

$$\int \sqrt{1-x^2} \arcsin x dx ;$$

$$\int \frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x} dx .$$

$$\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx ;$$

$$\int \sqrt{x} \ln^2 x dx ;$$

$$\int \ln(1+x^2) dx$$

$$\int \frac{1}{x \sqrt{x^2 - 2x - 3}} dx ;$$

$$\int \sqrt{x} \sin \sqrt{x} dx$$

$$\int \frac{\sqrt{1 + \sin x}}{\cos x} dx ;$$

$$\int e^{\sin x} \frac{x \cos^3 x - \sin x}{\cos^2 x} dx ;$$

$$\int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} (ab \neq 0) ;$$

$$\int x \ln \frac{1+x}{1-x} dx ;$$

$$\int \frac{dx}{(1+e^x)^2} .$$