第二章　　数列极限

§1　　实数系的连续性

实数系

实数集合 **R** 的重要的基本性质——**连续性**。

第二章　数列极限

§1　实数系的连续性

实数系

实数集合 **R** 的重要的基本性质——**连续性**。

数系的扩充历史

自然数集合 **N**：关于加法与乘法运算是封闭的，但是 **N** 关于减法运算并不封闭。

整数集合 **Z**：关于加法、减法和乘法都封闭了，但是 **Z** 关于除法是不封闭的。整数集合 **Z** 具有“离散性”。

有理数集合$\mathbf{Q}=\left\{x \mid x=\dfrac{q}{p}, p\in\mathbf{N}^{+}, q\in\mathbf{Z}\right\}$。关于加法、减法、乘法与除法四则运算都是封闭的。有理数集合$\mathbf{Q}$具有“稠密性”。

c

有理数集合$\mathbf{Q}=\left\{x \mid x=\dfrac{q}{p},\ p\in\mathbf{N}^{+},\ q\in\mathbf{Z}\right\}$。关于加法、减法、乘法与除法四则运算都是封闭的。有理数集合$\mathbf{Q}$具有“稠密性”。

虽然有理数集合是稠密的，但在坐标轴上留有“空隙”。例如用表示边长为1的正方形的对角线的长度，这个c就无法用有理数来表示。换言之，有理数集合对于开方运算是不封闭的。因此有必要将有理数集合加以扩充。

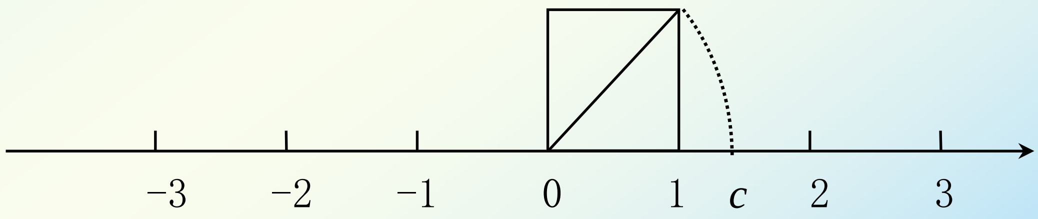

图2.1.1

有理数能表示成有限小数或无限循环小数，所以扩充有理数集合 **Q** 最直接的方式，就是把所有的无限不循环小数(称为无理数)吸纳进来。全体有理数和全体无理数所构成的集合称为实数集 **R**：

$$\mathbf{R}=\{x \mid x\text{是有理数或无理数}\}。$$

有理数能表示成有限小数或无限循环小数，所以扩充有理数集合 **Q** 最直接的方式，就是把所有的无限不循环小数(称为无理数)吸纳进来。全体有理数和全体无理数所构成的集合称为实数集 **R**：

$$\mathbf{R} = \{ x \mid x \text{是有理数或无理数} \}。$$

全体无理数所对应的点（称为**无理点**）填补了有理点在坐标轴上的所有“空隙”，即实数铺满了整个数轴。

实数集合的这一性质称为实数系 **R** 的“连续性”。**R** 又被称为**实数连续统**。

实数系 **R** 的连续性，从几何角度理解，就是实数全体布满整个数轴而没有“空隙”，但从分析角度阐述，则有多种相互等价的表述方式。“确界存在定理”就是实数系 **R** 连续性的表述之一。

最大数与最小数

记号：“$\exists$ ”表示“存在”或“可以找到”，“$\forall$ ”表示“对于任意的”或“对于每一个”。例如

$$A \subset B \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, x \in A, \text{有}\, x \in B,$$

$$A \not\subset B \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, x \in A, \text{使得}\, x \notin B。$$

最大数与最小数

记号："$\exists$"表示"存在"或"可以找到"，"$\forall$"表示"对于任意的"或"对于每一个"。例如

$$A \subset B \iff \forall x \in A, \text{有 } x \in B,$$

$$A \not\subset B \iff \exists x \in A, \text{使得 } x \notin B。$$

设S是一个数集，如果$\exists \xi \in S$，使得$\forall x \in S$，有$x \le \xi$，则称ξ是数集S的最大数，记为$\xi = \max S$；如果$\exists \eta \in S$，使得$\forall x \in S$，有$x \ge \eta$，则称η是数集S的最小数，记为$\eta = \min S$。

当数集S是非空有限集时，$\max S$是这有限个数中的最大者，$\min S$是这有限个数中的最小者。但是当S是无限集时，S可能不具有最大数及最小数。

例2.1.1 集合 $A=\{x|x\geq 0\}$ 没有最大数，但有最小数，$\min A = 0$。

例2.1.1 集合 $A=\{x|x\geq 0\}$ 没有最大数，但有最小数，$\min A = 0$。

例2.1.2 集合 $B=\{x|0\leq x<1\}$ 没有最大数。

证 用反证法。

假设集合 B 有最大数，记为 β。由 $\beta\in[0,1)$，可知 $\beta'=\dfrac{1+\beta}{2}\in[0,1)$。但是 $\beta'>\beta$，这就与 β 是集合 B 的最大数发生矛盾。所以集合 B 没有最大数。

上确界与下确界

设 S 是一个非空数集，如果 $\exists M \in \mathbf{R}$，使得 $\forall x \in S$，有 $x \leq M$，则称 M 是 S 的一个上界；如果 $\exists m \in \mathbf{R}$，使得 $\forall x \in S$，有 $x \geq m$，则称 m 是 S 的一个下界。

上确界与下确界

设 S 是一个非空数集，如果 $\exists M \in \mathbf{R}$，使得 $\forall\ x \in S$，有 $x \le M$，则称 M 是 S 的一个上界；如果 $\exists m \in \mathbf{R}$，使得 $\forall\ x \in S$，有 $x \ge m$，则称 m 是 S 的一个下界。

当数集 S 既有上界，又有下界时，称 S 为有界集。

S 为有界集 $\Leftrightarrow$ $\exists X > 0$，使得 $\forall x \in S$，有 $|x| \le X$ 。

设数集S有上界，记U为S的上界全体所组成的集合，则显然U不可能有最大数，下面将证明：U一定有最小数。

设U的最小数为β，就称β为数集S的**上确界**，即最小上界，记为

$$\beta = \sup S 。$$

上确界β满足下述两个性质：

1. β是数集S的上界：$\forall x \in S$，有$x \le \beta$；
2. 任何小于β的数不是数集S的上界：$\forall \varepsilon > 0$，$\exists x \in S$, 使得$x > \beta - \varepsilon$。

若数集S有下界，记L为S的下界全体所组成的集合，则显然L不可能有最小数，同样可以证明：L一定有最大数。

设L的最大数为α，就称α为数集S的**下确界**，即最大下界，记为

$$\alpha = \inf S\text{。}$$

下确界α满足下述两个性质：

1. α是数集S的下界：$\forall x \in S$，有$x \geq \alpha$；

2. 任何大于α的数不是数集S的下界：$\forall \varepsilon > 0$，$\exists x \in S$，使得$x < \alpha + \varepsilon$。

定理2.1.1(确界存在定理——实数系连续性定理) 非空有上界的数集必有上确界；非空有下界的数集必有下确界。

定理2.1.1(确界存在定理——实数系连续性定理) 非空有上界的数集必有上确界；非空有下界的数集必有下确界。

证 任何一个实数x可表示成

$$x=[x]+(x),$$

其中$[x]$表示x的整数部分，(x)表示x的非负小数部分。

将(x)表示成无限小数的形式：

$$(x) = 0.a_1a_2\cdots a_n\cdots,$$

其中a_1，a_2，…，a_n，…中的每一个都是数字0，1，2，…，9中的一个，若(x)是有限小数，则在后面接上无限个0。

注

无限小数$0.a_1a_2\cdots a_p000\cdots$（$a_p\neq 0$）与无限小数$0.a_1a_2\cdots(a_p-1)999\cdots$是相等的，为了保持表示的唯一性，约定在（$x$）的无限小数表示中不出现后者。这样，任何一个实数集合S就可以由一个确定的无限小数的集合来表示：

$$\{\, a_0+0.a_1a_2\cdots a_n\cdots \mid a_0=[\,x\,],\ 0.a_1a_2\cdots a_n\cdots=(x),\ x\in S \,\}$$。

设数集S有上界，则可令S中元素的整数部分的最大者为α_0，并记

$$S_0 = \{x | x \in S \text{ 并且} [x] = \alpha_0\}\text{。}$$

S_0不是空集，并且$\forall\ x \in S$，只要$x \notin S_0$，就有$x < \alpha_0$。

再考察数集S_0中元素的无限小数表示中第一位小数的数字，令它们中的最大者为α_1，并记

$$S_1 = \{x | x \in S_0 \text{ 并且}x\text{的第一位小数为}\alpha_1\}\text{。}$$

S_1也不是空集，并且对于任意$x \in S$，只要$x \notin S_1$，就有$x < \alpha_0 + 0.\alpha_1$。

一般地，考察数集S_{n-1}中元素的无限小数表示中第n位小数的数字，令它们中的最大者为α_n，并记

$$S_n = \{x \mid x \in S_{n-1} \text{ 并且}x\text{的第}n\text{位小数为}\alpha_n\}。$$

S_n不是空集，并且对于任意$x \in S$，只要$x \notin S_n$，就有$x < \alpha_0 + 0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$。

不断地做下去，我们得到一列非空数集$S \supset S_0 \supset S_1 \supset \cdots \supset S_n \supset \cdots$，和一列数$\alpha_0$，$\alpha_1$，$\alpha_2$，…，$\alpha_n$，…，满足

$$\alpha_0 \in \mathbf{Z}；$$

$$\alpha_k \in \{0, 1, 2, \cdots, 9\}，k \in \mathbf{N}^+。$$

令

$$\beta = \alpha_0 + 0.\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n \cdots 。$$

下面分两步证明β就是数集S的上确界。

令

$$\beta = \alpha_0 + 0.\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n \cdots。$$

下面分两步证明β就是数集S的上确界。

（1）设$x \in S$，则或者存在整数$n_0 \geq 0$，使得$x \notin S_{n_0}$；或者对任何整数 $n \geq 0$，有$x \in S_n$。

若$x \notin S_{n_0}$，便有

$$x < \alpha_0 + 0.\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{n_0} \leq \beta;$$

若$x \in S_n$（$\forall\ n \in \mathbf{N}$），由$S_n$的定义并逐个比较 x与 β的整数部分及每一位小数，即知有

$$x = \beta。$$

所以对任意的$x \in S$，有$x \leq \beta$，即β是数集S的上界。

（2） 对于任意给定的$\varepsilon > 0$，只要将自然数 n_0取得充分大，便有

$$\frac{1}{10^{n_0}} < \varepsilon 。$$

取 $x_0 \in S_{n_0}$，则β与x_0的整数部分及前n_0位小数是相同的，所以

$$\beta - x_0 \le \frac{1}{10^{n_0}} < \varepsilon ,$$

即

$$x_0 > \beta - \varepsilon ,$$

即任何小于β的数$\beta - \varepsilon$不是数集S的上界。

同理可证非空有下界的数集必有下确界。

证毕

关于数集的上（下）确界有下述的唯一性定理：

定理2.1.2 非空有界数集的上（下）确界是唯一的。

关于数集的上（下）确界有下述的唯一性定理：

定理2.1.2 非空有界数集的上（下）确界是唯一的。

确界存在定理反映了实数系连续性这一基本性质：假若实数全体不能布满整条数轴而是留有“空隙”，则“空隙”左边的数集就没有上确界，“空隙”右边的数集就没有下确界。

有理数集合$\mathbf{Q}$在数轴上有“空隙”，它就不具备实数集合$\mathbf{R}$所具有的“确界存在定理”，也就是说：$\mathbf{Q}$内有上（下）界的集合T未必在$\mathbf{Q}$内有它的上（下）确界。

关于数集的上（下）确界有下述的唯一性定理：

定理2.1.2 非空有界数集的上（下）确界是唯一的。

确界存在定理反映了实数系连续性这一基本性质：假若实数全体不能布满整条数轴而是留有“空隙”，则“空隙”左边的数集就没有上确界，“空隙”右边的数集就没有下确界。

有理数集合$\mathbf{Q}$在数轴上有“空隙”，它就不具备实数集合$\mathbf{R}$所具有的“确界存在定理”，也就是说：$\mathbf{Q}$内有上（下）界的集合T未必在$\mathbf{Q}$内有它的上（下）确界。

例2.1.3 设$T=\{x|\ x\in\mathbf{Q}$并且$x>0$，$x^2<2\}$，证明T在$\mathbf{Q}$内没有上确界。

证　略。