

§ 5 应用举例

本节介绍函数微分的一些应用，包括极值和最值问题、函数作图以及在数学建模中的应用。

极值问题

$f(x)$ 的全部极值点必定都在使得 $f'(x) = 0$ 和使得 $f'(x)$ 不存在的点集之中。使 $f'(x) = 0$ 的点称为 $f(x)$ 的驻点。

定理 5.5.1 (极值点判定定理) 设函数 $f(x)$ 在 x_0 点的某一领域中
有定义, 且 $f(x)$ 在 x_0 点连续。

(1) 设存在 $\delta > 0$, 使得 $f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 与 $(x_0, x_0 + \delta)$ 上可导,

(i) 若在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 上有 $f'(x) \geq 0$, 在 $(x_0, x_0 + \delta)$ 上有 $f'(x) \leq 0$, 则
 x_0 是 $f(x)$ 的极大值点;

(ii) 若在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 上有 $f'(x) \leq 0$, 在 $(x_0, x_0 + \delta)$ 上有 $f'(x) \geq 0$,
则 x_0 是 $f(x)$ 的极小值点;

(iii) 若 $f'(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 与 $(x_0, x_0 + \delta)$ 上同号, 则 x_0 不是 $f(x)$ 的
极值点。

定理 5.5.1 (极值点判定定理) 设函数 $f(x)$ 在 x_0 点的某一领域中有定义, 且 $f(x)$ 在 x_0 点连续。

(1) 设存在 $\delta > 0$, 使得 $f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 与 $(x_0, x_0 + \delta)$ 上可导,

(i) 若在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 上有 $f'(x) \geq 0$, 在 $(x_0, x_0 + \delta)$ 上有 $f'(x) \leq 0$, 则 x_0 是 $f(x)$ 的极大值点;

(ii) 若在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 上有 $f'(x) \leq 0$, 在 $(x_0, x_0 + \delta)$ 上有 $f'(x) \geq 0$, 则 x_0 是 $f(x)$ 的极小值点;

(iii) 若 $f'(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 与 $(x_0, x_0 + \delta)$ 上同号, 则 x_0 不是 $f(x)$ 的极值点。

(2) 设 $f'(x_0) = 0$, 且 $f(x)$ 在 x_0 点二阶可导,

(i) 若 $f''(x_0) < 0$, 则 x_0 是 $f(x)$ 的极大值点;

(ii) 若 $f''(x_0) > 0$, 则 x_0 是 $f(x)$ 的极小值点;

(iii) 若 $f''(x_0) = 0$, 则 x_0 可能是 $f(x)$ 的极值点, 也可能不是 $f(x)$ 的极值点。

证 (1)的结论显然，我们只证(2)。

因为 $f'(x_0)=0$ ，由 Taylor 公式

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2) \\ &= f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2) \end{aligned}$$

得到

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{(x-x_0)^2} = \frac{1}{2!} f''(x_0) + \frac{o((x-x_0)^2)}{(x-x_0)^2}。$$

因为当 $x \rightarrow x_0$ 时上式右侧第二项趋于 0，所以当 $f''(x_0) < 0$ 时，由极限的性质可知在 x_0 点附近成立

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{(x-x_0)^2} < 0,$$

所以

$$f(x) < f(x_0),$$

从而 $f(x)$ 在 x_0 取极大值。同样可讨论 $f''(x_0) > 0$ 的情况。

证毕

关于定理 5.5.1 中 (2) (iii), 可分别考察函数 $y = x^4$, $y = -x^4$ 和 $y = x^3$ 。 $x = 0$ 是 $y = x^4$ 的极小值点, 是 $y = -x^4$ 的极大值点, 而不是 $y = x^3$ 的极值点。但它们都满足 $y'(0) = 0$ 和 $y''(0) = 0$ 的条件。

关于定理 5.5.1 中 (2) (iii), 可分别考察函数 $y = x^4$, $y = -x^4$ 和 $y = x^3$ 。 $x = 0$ 是 $y = x^4$ 的极小值点, 是 $y = -x^4$ 的极大值点, 而不是 $y = x^3$ 的极值点。但它们都满足 $y'(0) = 0$ 和 $y''(0) = 0$ 的条件。

例 5.5.1 求函数 $f(x) = \sqrt[3]{(2x - x^2)^2}$ 的极值。

解 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 。由

$$f'(x) = \frac{4}{3}(2x - x^2)^{\frac{1}{3}}(1 - x),$$

可知 $f(x)$ 的驻点为 $x = 1$, 使得 $f'(x)$ 不存在的点为 $x = 0$ 和 $x = 2$ 。由于

(1) 当 $-\infty < x < 0$ 时, $f'(x) < 0$;

(2) 当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) > 0$;

(3) 当 $1 < x < 2$ 时, $f'(x) < 0$;

(4) 当 $2 < x < +\infty$ 时, $f'(x) > 0$,

由定理 5.5.1 中 (1) 的结论知 $f(0) = 0$ 是极小值, $f(1) = 1$ 是极大值, $f(2) = 0$ 是极小值。

例 5.5.2 求函数 $f(x) = (x^2 - 1)^3 + 1$ 的极值。

解 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 。计算得

$$f'(x) = 6x(x^2 - 1)^2, \quad f''(x) = 6(x^2 - 1)(5x^2 - 1)。$$

显然 $f(x)$ 的驻点为 $x = 0$, $x = 1$ 和 $x = -1$ 。由于 $f''(0) = 6 > 0$, 所以由定理 5.5.1 中 (2) 的结论知 $f(0) = 0$ 是极小值。

由于 $f''(\pm 1) = 0$, 不能用定理 5.5.1 中 (2) 的结论。但由于 $f'(x)$ 在 $x = 1$ 与 $x = -1$ 的左、右两侧保持同号, 由定理 5.5.1 中 (1) 的结论, 知 $f(1)$ 和 $f(-1)$ 都不是函数 $f(x)$ 的极值。

最值问题

闭区间上的连续函数必定能取到最大值与最小值。

函数的最大值与最小值统称为函数的最值，使函数取到最大值（或最小值）的点称为函数的最大值点（或最小值点），也称为函数的最值点。

对于一个定义于闭区间 $[a,b]$ 上的函数 $f(x)$ 来说，区间的两个端点 a 与 b 有可能成为它的最值点。同时，若最值点属于开区间 (a,b) 的话，那它一定是函数的极值点。因此，只要找出所有 $f(x)$ 的驻点与使 $f'(x)$ 不存在的点，再加上区间的端点，从中找出使函数取最大值或最小值的点就可以了。

例 5.5.3 求函数 $f(x) = \sqrt[3]{(2x - x^2)^2}$ 在区间 $[-1, 4]$ 上的最大值与最小值。

解 由例 5.5.1, 已知函数 $f(x)$ 在区间 $[-1, 4]$ 上的极大值点为 $x = 1$, 极大值为 $f(1) = 1$, 极小值点为 $x = 0$ 与 $x = 2$, 两个极小值都为 0。为了求最大值与最小值, 还须加上函数在区间端点的值 $f(-1) = \sqrt[3]{9}$ 与 $f(4) = 4$ 。对这些值进行比较, 就得到函数 $f(x)$ 在区间 $[-1, 4]$ 上的最大值点为 $x = 4$, 最大值为 $f(4) = 4$, 最小值点为 $x = 0$ 与 $x = 2$, 最小值为 0。

例 5.5.4 用铝合金制造容积固定的圆柱形罐头，罐身（侧面和底部）用整块材料拉制而成，顶盖是另装上去的，设顶盖的厚度是罐身厚度的三倍。问如何确定它的底面半径和高才能使得用料最省？

解 设罐身的厚度为 δ ，则顶盖的厚度是 3δ 。

记罐头的容积为 V ，底面半径为 r ，则高为 $h = \frac{V}{\pi r^2}$ 。于是，罐身的用料为

$$U_1(r) = \delta(\pi r^2 + 2\pi r h) = \delta\left(\pi r^2 + 2\frac{V}{r}\right),$$

顶盖的用料为

$$U_2(r) = 3\delta \pi r^2,$$

因此问题化为求函数

$$U(r) = U_1(r) + U_2(r) = \delta\left(4\pi r^2 + 2\frac{V}{r}\right), \quad r \in (0, +\infty)$$

的最小值。

对 $U(r)$ 求导, $U'(r) = 2\delta\left(4\pi r - \frac{V}{r^2}\right)$, 因此 $U'(r)$ 只有唯一的零点

$r_0 = \sqrt[3]{\frac{V}{4\pi}}$ 。由于

$$U''(r) = 4\delta\left(2\pi + \frac{V}{r^3}\right) > 0, \quad r \in (0, +\infty),$$

所以 r_0 是 $U(r)$ 的最小值点。

这时, 相应的高为

$$h_0 = \frac{V}{\pi r_0^2} = \frac{4\pi r_0^3}{\pi r_0^2} = 4r_0。$$

也就是说, 当罐头的高为底面直径的 2 倍时用料最省。

对 $U(r)$ 求导, $U'(r) = 2\delta\left(4\pi r - \frac{V}{r^2}\right)$, 因此 $U'(r)$ 只有唯一的零点

$r_0 = \sqrt[3]{\frac{V}{4\pi}}$ 。由于

$$U''(r) = 4\delta\left(2\pi + \frac{V}{r^3}\right) > 0, \quad r \in (0, +\infty),$$

所以 r_0 是 $U(r)$ 的最小值点。

这时, 相应的高为

$$h_0 = \frac{V}{\pi r_0^2} = \frac{4\pi r_0^3}{\pi r_0^2} = 4r_0。$$

也就是说, 当罐头的高为底面直径的 2 倍时用料最省。

用同样的方法可以推出, 若圆柱形的有盖容器是用厚薄相同的材料制成的, 那么当它的底面直径和高相等的时候用料最省。许多圆柱形的日常用品, 如漱口杯、保暖桶等, 都是采用这样的比例 (或近似这样的比例) 设计的。

例 5.5.5 设一辆汽车在平原上的行驶速度为 v_1 ，在草原上的行驶速度为 v_2 ，现要求它以最短的时间从平原上的 A 点到达草原上的 B 点，问应该怎么走？

解 显然，在同一种地形上，汽车应沿直线行进，所以它从 A 到 B 的运动轨迹应是由两条直线段组成的折线。

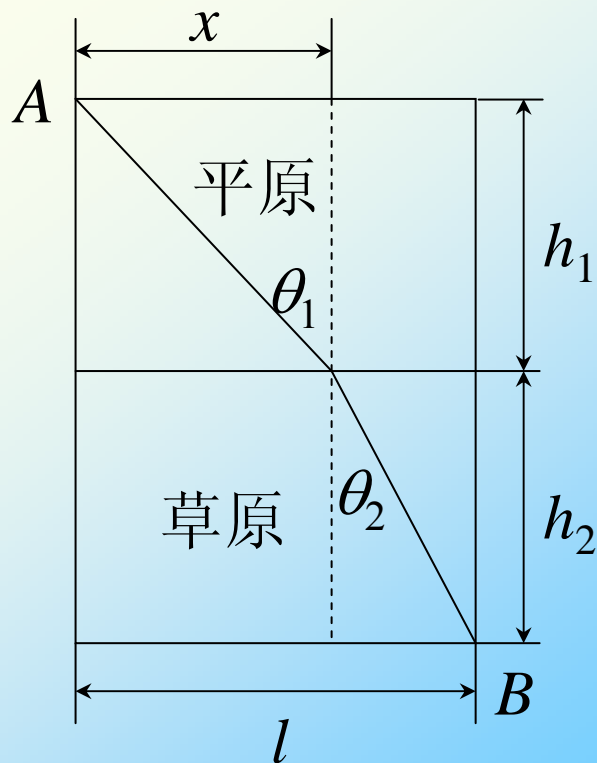
设汽车的行驶路径如图 5.5.2 所示，那么它的整个行驶时间应为

$$T(x) = \frac{\sqrt{h_1^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{h_2^2 + (l-x)^2}}{v_2}。$$

由

$$T'(x) = \frac{x}{v_1 \sqrt{h_1^2 + x^2}} - \frac{l-x}{v_2 \sqrt{h_2^2 + (l-x)^2}}，$$

可知 $T'(0) < 0$ ， $T'(l) > 0$ 。



由于

$$T''(x) = \frac{h_1^2}{v_1(h_1^2 + x^2)^{3/2}} + \frac{h_2^2}{v_2(h_2^2 + (l-x)^2)^{3/2}} > 0,$$

可知存在唯一的 $x_0 \in (0, l)$ ，使得 $T'(x_0) = 0$ 。因此 x_0 是 $T(x)$ 的唯一的极小值点，也就是它的最小值点。这时我们得到关系式

$$\frac{x_0}{v_1 \sqrt{h_1^2 + x_0^2}} = \frac{l - x_0}{v_2 \sqrt{h_2^2 + (l - x_0)^2}}。$$

由于

$$T''(x) = \frac{h_1^2}{v_1(h_1^2 + x^2)^{3/2}} + \frac{h_2^2}{v_2(h_2^2 + (l-x)^2)^{3/2}} > 0,$$

可知存在唯一的 $x_0 \in (0, l)$, 使得 $T'(x_0) = 0$ 。因此 x_0 是 $T(x)$ 的唯一的极小值点, 也就是它的最小值点。这时我们得到关系式

$$\frac{x_0}{v_1 \sqrt{h_1^2 + x_0^2}} = \frac{l - x_0}{v_2 \sqrt{h_2^2 + (l - x_0)^2}}。$$

由于光线在传播过程中所花的时间总是最短的, 即光线总是走“捷径”的, 所以光线的传播问题在本质上与本题是相同的。我们可以将本题中汽车的行驶换成光线的传播, 将平原和草原换成光线传播过程中的两种不同的介质, 这样就得到了光学中著名的折射定律

$$\frac{\sin \theta_1}{v_1} = \frac{\sin \theta_2}{v_2}。$$

例 5.5.6 对产品从生产到销售的过程进行经济核算时，至少要涉及到三个方面的问题：成本、收益和利润。设产量为 Q ，则总成本 $C(Q)$ 一般可以表示成两部分的和

$$C(Q) = f + v(Q) \cdot Q。$$

这里， $f > 0$ 称为固定成本（如厂房和设备的折旧、工作人员的工资、财产保险费等），一般可以认为与产量的大小无关，而 $v(Q) \cdot Q$ 称为可变成本（如原材料、能源等）， $v(Q)$ 是一个正值函数，表示在总共生产 Q 件产品的情况下，每生产一件的可变成本，最简单的情形是 $v(Q) = v =$ 正常数。

$C(Q)$ 的导数 $C'(Q)$ 称为**边际成本**，其经济学意义是在总共生产 Q 件产品的情况下，生产第 Q 件产品的成本。

总收益 $E(Q) = p(Q) \cdot Q$ 是指把 Q 件产品销售出去后得到的收入，这里 $p(Q)$ 称为价格函数，表示在总共生产 Q 件产品的情况下，每件产品的销售价格。一般说来，生产量越大，每件产品的价格就越便宜，因此 $p(Q)$ 是 Q 的单调减少函数。

$E(Q)$ 的导数 $E'(Q)$ 相应地称为**边际收益**，其经济学意义是在总共生产销售了 Q 件产品的情况下，销售出第 Q 件产品所得到的收入。

总收益减去总成本便是总利润。将利润函数记为 $P(Q)$ ，则

$$P(Q) = E(Q) - C(Q),$$

当 $E(Q)$ 和 $C(Q)$ 二阶可导时，利用 Lagrange 中值定理的推论 2，就可以得到经济学中的“**最大利润原理**”：

“当且仅当**边际成本与边际收益相等**，并且**边际成本的变化率大于边际收益的变化率**时，可取得最大利润。”

这里的第一个条件即为

$$P'(Q) = E'(Q) - C'(Q) = 0,$$

而第二个条件可表示为

$$P''(Q) = E''(Q) - C''(Q) < 0,$$

请读者自行思考它们的经济学意义。

比如, 某产品的价格 $p(Q) = a - bQ, (a, b > 0, Q < \frac{a}{b})$, 成本 $C(Q) = f + vQ$, 于是利润

$$P(Q) = E(Q) - C(Q) = -bQ^2 + (a - v)Q - f,$$

要使得整个生产经营不亏本, 显然在定价时须保证 $a - v > 0$ 。

容易算出, 当产量 $Q_0 = \frac{a - v}{2b}$ 时有 $P'(Q_0) = 0$ 和 $P''(Q_0) < 0$, 这时所获取的利润为最大。

数学建模

例 5.5.7 (Malthus 人口模型) 设 $p(t)$ 是某地区的人口数量函数, 则在单位时间中的人口增长数, 即人口增长速率应为人口数量函数的导数 $p'(t)$ 。

显然, 某一时刻的人口数量越多, 在单位时间中的人口增长数也就越多。Malthus 假定这两者成比例关系, 设比例系数为 λ , 他在 1798 年提出了人类历史上的第一个人口模型

$$\begin{cases} p'(t) = \lambda p(t) \\ p(t_0) = p_0 \end{cases},$$

将 “ $p'(t) = \lambda p(t)$ ” 写成微分形式 $\frac{dp}{p} = \lambda dt$, 得到

$$\ln p = \lambda t + C, \quad \text{或} \quad p = C_1 e^{\lambda t},$$

其中 $C_1 = e^C$ 。令 $t = t_0$ 并利用初始条件 $p(t_0) = p_0$, 可以定出 $C_1 = p_0 e^{-\lambda t_0}$, 最终得到人口数量函数

$$p(t) = p_0 e^{\lambda(t-t_0)}。$$

例 5.5.8 在供水、化工生产等过程中，都有一个对液体进行过滤，除去渣滓的问题。现以过滤式净水器的使用为例，来建立相应的数学模型。

要对液体进行过滤，首先要设置一个由过滤物质组成的过滤层（称为滤芯）。在过滤的过程中，水中的杂质沉积在过滤层上，也成为过滤层的一部分。假设杂质在水中的含量和进水的压力都是常数，那么杂质沉积的厚度与累积的总滤出流量 $Q(t)$ 成正比，同时，流速的减少与杂质沉积的厚度也成正比。若设初始时刻的流速为 q_0 ，由导数的意义即知 t 时刻的流速应当是 $Q'(t)$ ，从而流速的减少量为 $q_0 - Q'(t)$ ，由上所述，它应与总滤出流量 $Q(t)$ 成正比。这样，就得到了它的数学模型为

$$\begin{cases} Q'(t) = q_0 - \lambda Q(t), \\ Q(0) = 0. \end{cases}$$

作代换 $Q_1(t) = q_0 - \lambda Q(t)$ ，便有

$$\begin{cases} Q_1'(t) = -\lambda Q_1(t), \\ Q_1(0) = q_0. \end{cases}$$

采用例 5.5.7 类似的方法，可以求出

$$Q_1(t) = q_0 e^{-\lambda t},$$

即得到累积的总滤出流量为

$$Q(t) = \frac{1}{\lambda}(q_0 - Q_1(t)) = \frac{q_0}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t}).$$

因为

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} Q(t) = \frac{q_0}{\lambda} \quad \text{及} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} Q'(t) = 0,$$

所以我们可以知道，在定压的过滤过程中，并不是想滤多少就可以不受限制地滤多少，其流出的总量是有上限 $\frac{q_0}{\lambda}$ 的。在流量接近这个上限的时候，其流速将趋近于零，也就是说，此时杂质已沉积得过厚，需要清洗或更换滤芯了。

函数作图

函数作图的过程一般可分为以下几个步骤：

- (1) 考察函数 $f(x)$ 的定义域及其在定义域内的连续性, 找出函数的不连续点, 并以这些点作为分点, 将定义域分成若干个区间, 使函数在每个区间上连续。

函数作图

函数作图的过程一般可分为以下几个步骤：

- (1) 考察函数 $f(x)$ 的定义域及其在定义域内的连续性, 找出函数的不连续点, 并以这些点作为分点, 将定义域分成若干个区间, 使函数在每个区间上连续。
- (2) 计算 $f'(x)$, 找出 $f(x)$ 的驻点与导数不存在的点, 从而求出 $f(x)$ 的极值点与极值, 并以这些点为分点, 对区间进行再划分, 使函数在每个区间上保持单调。

函数作图

函数作图的过程一般可分为以下几个步骤：

- (1) 考察函数 $f(x)$ 的定义域及其在定义域内的连续性, 找出函数的不连续点, 并以这些点作为分点, 将定义域分成若干个区间, 使函数在每个区间上连续。
- (2) 计算 $f'(x)$, 找出 $f(x)$ 的驻点与导数不存在的点, 从而求出 $f(x)$ 的极值点与极值, 并以这些点为分点, 对区间进行再划分, 使函数在每个区间上保持单调。
- (3) 计算 $f''(x)$, 找出所有使 $f''(x) = 0$ 的点与使 $f''(x)$ 不存在的点, 从而求出 $f(x)$ 的拐点, 并以这些点为分点, 继续对区间进行再划分, 使函数在每个区间上保持固定的凸性。

(4) 对上述 (1), (2), (3) 三个步骤所得到的结果列出表格, 在表格中标出函数在每个分点上的函数值 (如果有定义的话), 以及函数在每个区间上的单调性与凸性。

(4) 对上述 (1), (2), (3) 三个步骤所得到的结果列出表格, 在表格中标出函数在每个分点上的函数值 (如果有定义的话), 以及函数在每个区间上的单调性与凸性。

(5) 求出曲线 $y = f(x)$ 的渐近线, 包括水平渐近线、垂直渐近线和斜渐近线。

(4) 对上述 (1), (2), (3) 三个步骤所得到的结果列出表格, 在表格中标出函数在每个分点上的函数值 (如果有定义的话), 以及函数在每个区间上的单调性与凸性。

(5) 求出曲线 $y = f(x)$ 的渐近线, 包括水平渐近线、垂直渐近线和斜渐近线。

通过上述步骤, 就可作出函数 $y = f(x)$ 的图象。

须注意的是, 在作图之前, 先应该考察函数的几何性质如奇偶性、周期性等, 如 $f(x)$ 是奇函数或偶函数, 那么只要画出一半图形, 而另一半可通过对称画出; 对于周期函数, 只要画出一个周期的图形就可以了, 而其余部分可通过周期延拓画出。

例 5.5.9 作出函数 $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的图象。



解 因为 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ 是定义于整个实数域上的偶函数，我们只要考察 $x \geq 0$ 就可以了。

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} x e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad f''(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} (x^2 - 1)。$$



$f(x)$ 的可能极值点为 $f'(x)$ 的零点 $x = 0$ ，可能的拐点的横坐标为 $f''(x)$ 的零点 $x = 1$ 。

经检验， $f'(x)$ 在 $x = 0$ 的右侧和左侧的符号分别为负和正，所以 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点； $f''(x)$ 在 $x = 1$ 的右侧和左侧的符号分别为正和负，所以 $(1, f(1))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点。

上面的分析可以列表如下：

x	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	0	-	-	-
$f''(x)$	-	-	0	+
$f(x)$	极大值 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$		拐点 $\left(1, \frac{1}{\sqrt{2\pi e}}\right)$	

上面的分析可以列表如下：

x	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	0	-	-	-
$f''(x)$	-	-	0	+
$f(x)$	极大值 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$		拐点 $\left(1, \frac{1}{\sqrt{2\pi e}}\right)$	

当 $x \rightarrow \infty$ 时， $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \rightarrow 0$ ，因此 $y = 0$ 即 x 轴是 $y = f(x)$ 的水平渐近线，容易看出，曲线 $y = f(x)$ 不再有其它的渐近线。

根据这些信息，便可作出函数 $y = f(x)$ 在右半平面的图象，然后利用对称性，就可以作出函数的整个图象了（图 5.5.3）。

以后学习概率论时会知道， $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ 是一个非常重要的函数。

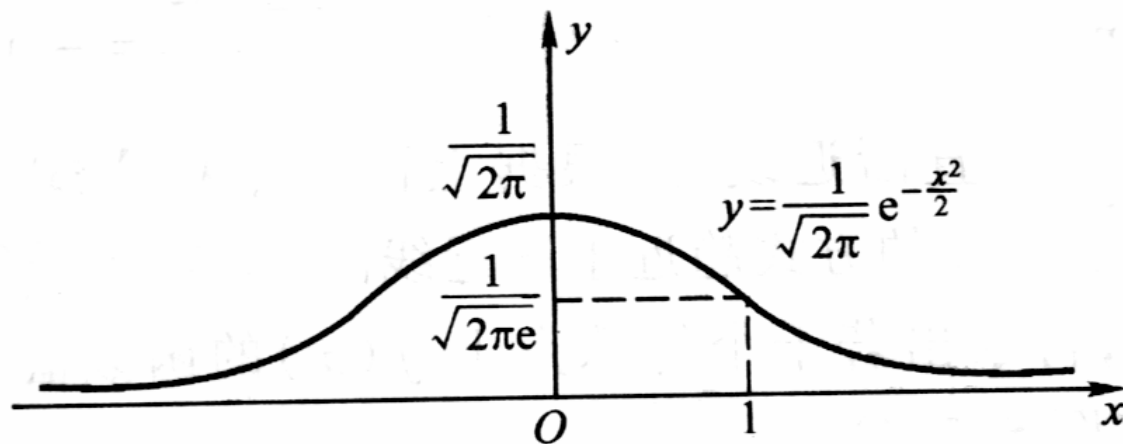


图 5.5.3

例 5.5.10 作出函数 $y = \frac{(x-1)^2}{3(x+1)}$ 的图象。

解 由于函数 $f(x) = \frac{(x-1)^2}{3(x+1)}$ 的定义域为 $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ ，可知函数的图象包含两条曲线，它们被直线 $x = -1$ 左右分开。





$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x+1) - (x-1)^2}{3(x+1)^2} = \frac{(x+3)(x-1)}{3(x+1)^2}.$$

$f'(x)$ 有零点 $x = 1$ 和 $x = -3$ 。由于 $f'(x)$ 在 $x = -3$ 的右侧和左侧的符号分别为负和正，而在 $x = 1$ 的右侧和左侧的符号分别为正和负，所以 $x = -3$ 是 $f(x)$ 的极大值点， $x = 1$ 是 $f(x)$ 的极小值点。

$$f''(x) = \frac{8}{3(x+1)^3},$$

因为 $f''(x)$ 在定义域中没有零点，所以曲线上没有拐点。

根据上述结果即可列出下面的表格：

x	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	无定义	-	0	+
$f''(x)$	-	-	-	无定义	+	+	+
$f(x)$		极大值 $-\frac{8}{3}$		无定义		极小值 0	

由例 5.4.14 , $y = \frac{(x-1)^2}{3(x+1)}$ 的斜渐近线方程为

$$y = \frac{x}{3} - 1。$$

又因为

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x-1)^2}{3(x+1)} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x-1)^2}{3(x+1)} = -\infty,$$

所以 $x = -1$ 是它的垂直渐近线, 且根据上面两个极限式, 可以知道曲线在 $x = -1$ 的左右两侧以怎样的方式趋近于渐近线的。

根据这些信息, 就不难作出函数 $y = f(x)$ 的图形了(图 5.5.4)。

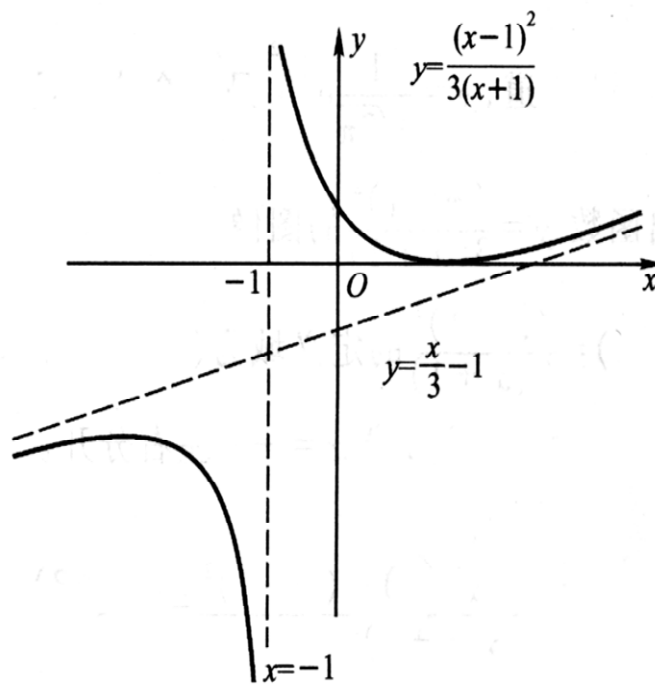


图 5.5.4

例 5.5.11 作出函数 $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}$ 的图象。

解 函数

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1} = \sqrt[3]{(x-1)^2} \cdot \sqrt[3]{x+1}$$

的定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 。





$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[\sqrt[3]{(x-1)^2} \cdot \sqrt[3]{x+1} \right]' = \frac{1}{3} \left(2 \frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{x-1}} + \frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} \right) \\ &= \frac{1}{3} \frac{2(x+1) + (x-1)}{\sqrt[3]{x-1} \cdot \sqrt[3]{(x+1)^2}} = \frac{(x + \frac{1}{3})}{\sqrt[3]{x-1} \cdot \sqrt[3]{(x+1)^2}}, \end{aligned}$$

$f'(x)$ 有零点 $x = -\frac{1}{3}$ ，并且在 $x = \pm 1$ 处 $f'(x)$ 不存在。经检测 $f'(x)$ 在这些点左右两侧的符号，即可知道 $x = -1$ 不是函数的极值点， $x = -\frac{1}{3}$ 是函数的极大值点， $x = 1$ 是函数的极小值点。

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \left[\frac{(x + \frac{1}{3})}{\sqrt[3]{x-1} \cdot \sqrt[3]{(x+1)^2}} \right]' \\
 &= \frac{\sqrt[3]{x-1} \cdot \sqrt[3]{(x+1)^2} - \left(\frac{x}{3} + \frac{1}{9}\right) \cdot \left[\frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} + 2 \frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{x+1}} \right]}{\left[\sqrt[3]{x-1} \cdot \sqrt[3]{(x+1)^2} \right]^2} \\
 &= \frac{1 - \left(\frac{x}{3} + \frac{1}{9}\right) \cdot \left(\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1}\right)}{\sqrt[3]{x-1} \cdot \sqrt[3]{(x+1)^2}} = \frac{-8}{9 \cdot \sqrt[3]{(x-1)^4} \cdot \sqrt[3]{(x+1)^5}},
 \end{aligned}$$

即知 $f(x)$ 的二阶导数没有零点，但在 $x = \pm 1$ 处 $f''(x)$ 不存在。由于 $f''(x)$ 在 $x = -1$ 的两侧符号相反，而在 $x = 1$ 的两侧符号相同，所以 $x = -1$ 是曲线的拐点，而 $x = 1$ 不是曲线的拐点。

根据上述结果即可列出下面的表格：

	$(-\infty, 1)$	-1	$(-1, -\frac{1}{3})$	$-\frac{1}{3}$	$(-\frac{1}{3}, 1)$	1	$(1, \infty)$
$f'(x)$	+	不存在	+	0	-	不存在	+
$f''(x)$	+	不存在	-	-	-	不存在	-
$f(x)$		拐点 $(-1, 0)$		极大 值 $\frac{2}{3}\sqrt[3]{4}$		极小 值 0	

由例 5.4.15, $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}$ 的渐近线方程为

$$y = x - \frac{1}{3}。$$

根据这些信息, 就可作出函数 $y = f(x)$ 的图形了 (图 5.5.5)。

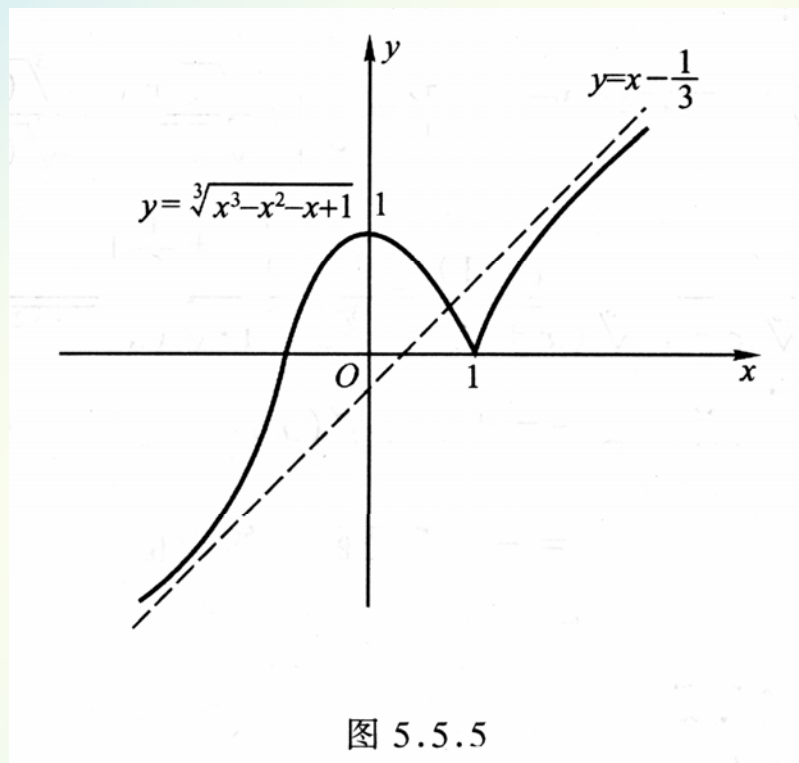


图 5.5.5