

§ 5 微积分实际应用举例

微元法

我们先回忆一下求曲边梯形面积 S 的步骤：对区间 $[a, b]$ 作划分

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

然后在小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 中任取点 ξ_i ，并记 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ，这样就得到了小曲边梯形面积的近似值 $\Delta S_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i$ 。最后，将所有的小曲边梯形面积的近似值相加，再取极限，就得到

$$S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx。$$

对于上述步骤，我们可以换一个角度来看：将分点 x_{i-1} 和 x_i 分别记为 x 和 $x + \Delta x$ ，将区间 $[x, x + \Delta x]$ 上的小曲边梯形的面积记为 ΔS ，并取 $\xi_i = x$ ，于是就有 $\Delta S \approx f(x)\Delta x$ 。然后令 $\Delta x \rightarrow 0$ ，这相当于对自变量作微分，这样 Δx 变成 dx ， ΔS 变成 dS ，于是上面的近似等式就变为微分形式下的严格等式 $dS = f(x)dx$ 。最后，把对小曲边梯形面积的近似值进行相加，再取极限的过程视作对微分形式 $dS = f(x)dx$ 在区间 $[a, b]$ 上求定积分，就得到

$$S = \int_a^b f(x)dx。$$

根据上面的理解，在解决实际问题时，我们可以简捷地按照以下的步骤

$$\xrightarrow{\substack{\text{自变量} \\ \text{分割}}} [x, x + \Delta x] \xrightarrow{\substack{\text{科学} \\ \text{规律}}} \Delta S \approx f(x)\Delta x \xrightarrow{\substack{\text{转为} \\ \text{微分}}} dS = f(x)dx \xrightarrow{\substack{\text{直接} \\ \text{积分}}} S = \int_a^b f(x)dx$$

来直接求解。

了解了方法的实质以后，上述过程还可以进一步简化：即一开始就将小区间形式地取为 $[x, x + dx]$ （ dx 称为 x 的微元），然后根据实际问题得出微分形式 $dS = f(x)dx$ （ dS 称为 S 的微元），再在区间 $[a, b]$ 上求积分。也就是

$$dx \longrightarrow dS = f(x)dx \longrightarrow S = \int_a^b f(x)dx。$$

这种处理问题和解决问题的方法称为**微元法**。微元法使用起来非常方便，在解决实际问题中应用得极为广泛，如§4中计算曲线的弧长、几何体的体积、旋转曲面的面积等公式都可以直接用微元法来导出，下面我们举一些其它类型的例子。

由静态分布求总量

我们首先考虑静态分布问题。设一根长度为 l 的直线段上分布着某种物理量（如质量、热量、电荷量等等），将其平放在 x 轴的正半轴上，使它的一头与原点重合，若它在 x 处的密度（称为线密度）可由某个连续的**分布函数** $\rho(x)$ 表示 ($x \in [0, l]$)，由微元法，它在 $[x, x + dx]$ 上的物理量 dQ 为

$$dQ = \rho(x)dx,$$

对等式两边在 $[0, l]$ 上积分，就得到由分布函数求总量的公式

$$Q = \int_0^l \rho(x)dx。$$

例 7.5.1 如图 7.5.1 的一根金属棒，其密度分布为

$$\rho(x) = 2x^2 + 3x + 6 \text{ (kg/m)},$$

求这根金属棒的质量 M 。

解

$$M = \int_0^6 (2x^2 + 3x + 6) dx$$
$$= \left(\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 6x \right) \Big|_0^6 = 234 \text{ (kg)}。$$

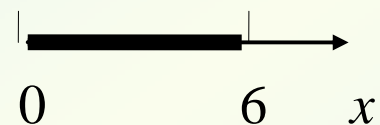


图 7.5.1

例 7.5.1 如图 7.5.1 的一根金属棒，其密度分布为

$$\rho(x) = 2x^2 + 3x + 6 \text{ (kg/m)},$$

求这根金属棒的质量 M 。

解
$$M = \int_0^6 (2x^2 + 3x + 6) dx$$
$$= \left(\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 6x \right) \Big|_0^6 = 234 \text{ (kg)}。$$

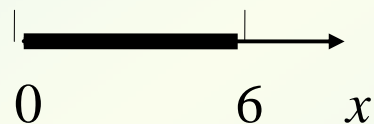


图 7.5.1

这个问题可以作以下的推广：

(1) 假定物理量分布在一个平面区域上， x 的变化范围为区间 $[a, b]$ 。如果过 x ($a \leq x \leq b$) 点并且垂直于 x 轴的直线与该平面区域之交上的物理量的密度可以用 $f(x)$ 表示，或者说该平面区域在横坐标位于 $[x, x + dx]$ 中的部分上的物理量可以表示为 $f(x)dx$ ，那么由类似的讨论，可以得到这个区域上的总物理量为

$$Q = \int_a^b f(x) dx。$$

例 7.5.2 求圆心在水下 10 m，半径为 1 m 的竖直放置的圆形铁片（图 7.5.2）所受到的水压力。

解 由物理定律，浸在液体中的物体在深度为 h 的地方所受到的压强为

$$p = h \cdot \rho g ,$$

这里， ρ 是液体的密度， g 是重力加速度。以铁片的圆心为原点、沿铅垂线方向向下为 x 轴的正向建立坐标系，于是铁片在深度为 $10+x$ 处 ($-1 \leq x \leq 1$) 受到的压强为 $(10+x)g$ ，在圆铁片上截取与水面平行、以微元 dx 为宽度的一条带域，则带域的面积

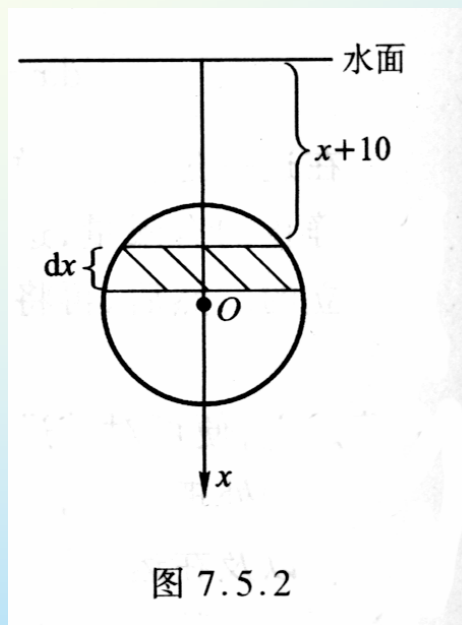
$$dS = 2\sqrt{1-x^2} dx ,$$

所以带域上所受到的压力为

$$dF = 2g\sqrt{1-x^2} \cdot (10+x)dx ,$$

于是铁片所受到的水压力为

$$F = 2g \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \cdot (10+x)dx = 10\pi g \quad (\text{N}) .$$



这个结论可以推广到立体区域去。事实上，§4 的第三部分给出了求三维空间中夹在平面 $x = a$ 和 $x = b$ 之间的几何体的体积公式：设过 x 点且与 x 轴垂直的平面与该几何体相截，截面积为 $A(x)$ ，则几何体的体积为

$$V = \int_a^b A(x)dx。$$

此式就可以看成是应用本方法的一个特例，其中物理量的密度函数 $A(x)$ 是截面的面积。

(2)假定物理量是分布在一条平面曲线

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [T_1, T_2]$$

上，分布函数（即物理量的密度）为 $f(t)$ ，在 $(x(t), y(t))$ 处截取一段长度为 dl 的弧，那么在这段弧上的物理量 dQ 为

$$dQ = f(t)dl。$$

利用弧长的微分公式，

$$dQ = f(t)dl = f(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt，$$

关于 t 在 $[T_1, T_2]$ 上积分，就得到

$$Q = \int_{T_1}^{T_2} f(t) dl = \int_{T_1}^{T_2} f(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt。$$

这个结论可以推广到空间曲线的情况。

例 7.5.3 设上半个金属环 $x^2 + y^2 = R^2$ ($y \geq 0$) 上任一点处的电荷线密度等于该点到 y 轴的距离的平方, 求环上的总电量。

解 将金属环的方程写成参数形式

$$\begin{cases} x = R \cos t, \\ y = R \sin t, \end{cases} \quad t \in [0, \pi],$$

于是

$$dl = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = R dt。$$

分布函数 $f(t) = [x(t)]^2 = R^2 \cos^2 t$, 因此

$$dQ = f(t)dl = R^3 \cos^2 t dt,$$

所以环上的总电量为

$$Q = R^3 \int_0^{\pi} \cos^2 t dt = \frac{R^3 \pi}{2}。$$

(3)这种类型的问题远非只局限于物理学的范畴,无论是自然科学还是社会科学中,但凡给出的是某变量的分布“密度”(比如,人口问题中的人口出生密度、交通问题中的车流密度等等)而需要总量的,都可以用上述的思路求解。

求动态效应

除了上述这些静态的物理量之外，还有一类物理量是通过运动而产生的，或者说是另一个物理量持续作用的效果。比如，“位移”是速度作用了一段时间的结果；“功”是力作用了一段距离的结果，等等。

在 § 1 中已经知道，以速度 $v(t)$ 做变速运动的物体在 $[T_1, T_2]$ 走过的路程为

$$S = \int_{T_1}^{T_2} v(t) dt ,$$

这可以用微元法来理解：在小区间 $[t, t + dt]$ 上速度可近似地看作是 $v(t)$ ，因此走过的一小段路程为

$$dS = v(t) dt ,$$

两边求积分，就得到了前面的结果。

这样的思路可以运用到所有这类问题中去。

例 7.5.4 一个内半径为 R 的圆柱形汽缸，点火后于时刻 t_0 到 t_1 将活塞从 $x = a$ 处推至 $x = b$ 处（ t_0 与 t_1 非常接近），求它在这段时间中的平均功率。

解 由于 t_0 与 t_1 非常接近，可以认为在这段时间内汽缸中的温度没有变化，由物理学定律，汽缸中气体的压强 p 与体积 V 成反比，即 $p = \frac{C}{V}$ ， C 是点火瞬间汽缸中气体的压强 p_0 与体积 aS 的乘积（ S 为活塞的截面积 πR^2 ）。所以当活塞在 x 处时，作用在活塞上的压力为

$$F = p \cdot S = \frac{C}{V} S = \frac{C}{Sx} S = \frac{C}{x},$$

利用微元法，活塞移动 dx 距离所做的功可表示为

$$dW = Fdx = \frac{C}{x} dx,$$

于是，所求的平均功率为

$$N = \frac{W}{T} = \frac{C}{t_1 - t_0} \int_a^b \frac{dx}{x} = \frac{ap_0 S}{t_1 - t_0} \ln \frac{b}{a}。$$

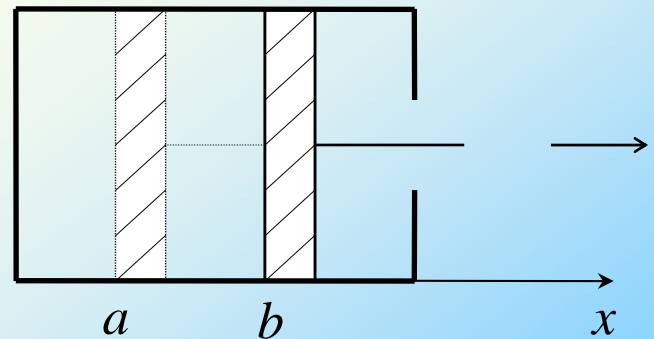


图7.5.3

简单数学模型和求解

要用数学技术去解决实际问题，首先必须建立数学模型。由于最重要的数学建模工具是微分，而微分与积分互为逆运算，所以积分便理所当然地成为求解数学模型的有力手段。将微分与积分结合起来，就可以为许多实际问题建立起相应的数学关系。

比如，关于例 5.5.9 给出的 Malthus 人口模型

$$\begin{cases} p'(t) = \lambda p(t), \\ p(t_0) = p_0, \end{cases},$$

可以直接对微分等式

$$\frac{dp}{p} = \lambda dt$$

的两边在 $[t_0, t]$ 上求积分，这时 p 的变化范围相应地为 $[p_0, p]$ ，

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = \lambda \int_{t_0}^t dt ,$$

于是

$$\ln \frac{p}{p_0} = \lambda(t - t_0) ,$$

即

$$p = p_0 e^{\lambda(t-t_0)} .$$

例 7.5.5 (跟踪问题模型) 设 A 在初始时刻从坐标原点沿 y 轴正方向前进, 同时 B 于 $[a,0]$ 处开始保持距离 a 对 A 进行跟踪 (即 B 的前进方向始终对着 A 的位置, 并与 A 始终保持距离 a), 求 B 的运动轨迹。

解 设 B 的运动轨迹为

$$y = y(x)$$

利用跟踪的要求, 可以得到数学模型

$$\begin{cases} y' = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}, \\ y(a) = 0, \end{cases}$$

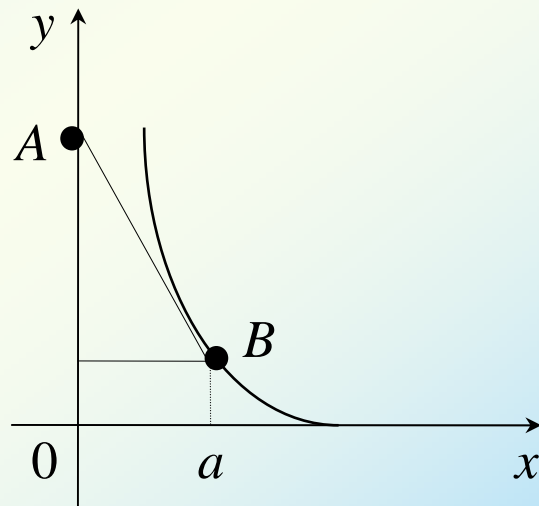
两边求定积分

$$\int_0^y dy = -\int_a^x \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} dx,$$

即得到 B 的运动轨迹方程为

$$y = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} - \sqrt{a^2 - x^2}.$$

这也可以看成一个重物 B 被 A 用一根长度为 a 的绳子拖着走时留下的轨迹, 所以该曲线又被称为**曳线**。



例 7.5.6 (火箭飞行的运动规律)

火箭是靠将燃料变成气体向后喷射，即用去一部分质量来得到前进的动力。

设在时刻 t 火箭的总质量为 $M(t)$ ，速度为 $v(t)$ ，从而其动量为 $M(t)v(t)$ 。在从 t 到 $t+dt$ 时间段中，有部分燃料以相对于火箭体的常速度 u 被反向喷射出去，在时刻 $t+dt$ 火箭质量为 $M(t+dt)$ ，速度为 $v(t+dt)$ ，相应地，喷射掉的燃料质量为 $M(t)-M(t+dt)$ ，而其速度为 $v(t+dt)-u$ ，且此时系统的动量等于火箭剩余部分的动量与燃料的动量之和。

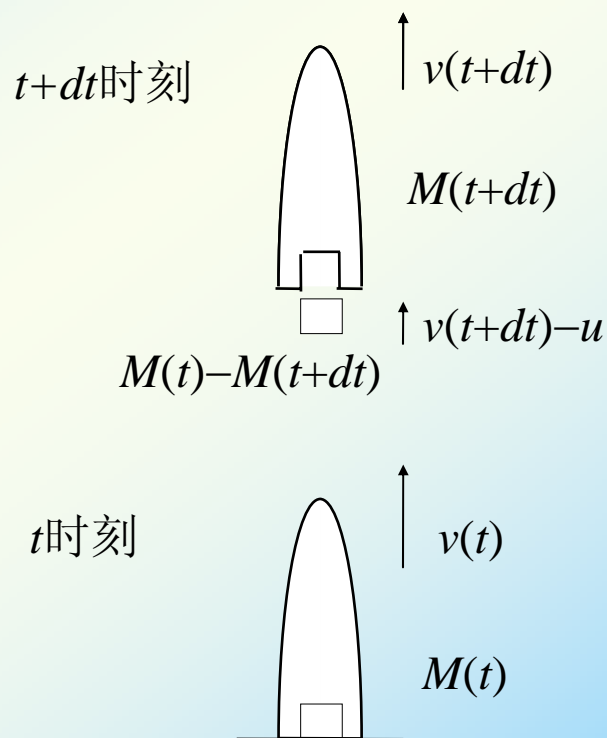


图7.5.6

因此在时间段 $[t, t + dt]$ 中，系统动量的改变量为

$$\begin{aligned} & \{M(t + dt)v(t + dt) + [M(t) - M(t + dt)][v(t + dt) - u]\} - M(t)v(t) \\ &= M(t)[v(t + dt) - v(t)] + [M(t + dt) - M(t)]u \\ &= M(t)v'(t)dt + uM'(t)dt \quad 。 \end{aligned}$$

再由冲量定律：动量的改变量等于力与作用时间的乘积，即冲量 Fdt ，这样，就得到火箭运动的微分方程为

$$M \frac{dv}{dt} = F - u \frac{dM}{dt} ,$$

这里 F 是作用于火箭系统的外力， $M \frac{dv}{dt}$ 称为火箭的反推力。

特别地，当火箭在地球表面垂直向上发射时， $F = -Mg$ ，方程成为

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = -g - u \frac{1}{M} \frac{dM}{dt}, \\ v(0) = 0, M(0) = M_0, \end{cases}$$

两边在 $[0, t]$ 上积分，

$$\int_0^t v'(t) dt = -\int_0^t g dt - u \int_0^t \frac{M'(t)}{M(t)} dt,$$

就得到

$$v(t) = u \ln \frac{M_0}{M(t)} - gt。$$

例 7.5.7 (Logistic 人口模型)

Malthus 人口模型的解为

$$p = p_0 e^{\lambda(t-t_0)},$$

当 $t \rightarrow \infty$ 时有 $p(t) \rightarrow \infty$ ，这显然是荒谬的，因为人口的数量增加到一定程度后，自然资源和环境条件就会对人口的继续增长起限制作用，并且限制的力度随人口的增加而越来越强。也就是说，在任何一个给定的环境和资源条件下，人口的增长不可能是无限的，它必定有一个上界 p_{\max} 。

荷兰生物数学家 Verhulst 认为，人口的增长速率应随着 $p(t)$ 接近 p_{\max} 而越来越小，他提出了一个修正的人口模型

$$\begin{cases} p'(t) = \lambda \left[1 - \frac{p(t)}{p_{\max}} \right] p(t), \\ p(t_0) = p_0, \end{cases}$$

将含有 p 的项全部集中到左边，两边在 $[t_0, t]$ 上积分，

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p_{\max} \cdot p - p^2} = \frac{\lambda}{p_{\max}} \int_{t_0}^t dt ,$$

利用有理函数的积分公式，即可解出

$$p = \frac{p_{\max}}{1 + \left(\frac{p_{\max}}{p_0} - 1 \right) e^{-\lambda(t-t_0)}} .$$

在这模型中，当 $t \rightarrow \infty$ 时有 $p(t) \rightarrow p_{\max}$ 。

美国和法国都曾用这个模型预测过人口，结果是令人满意的。

从 Kepler 行星运动定律到万有引力定律

最后，我们用 Kepler 的行星运动三大定律、Newton 第二运动定律再加上微积分来导出万有引力定律，以作为本节的结束。

对任意一个确定的行星，由 Kepler 第一定律，以太阳（即椭圆的一个焦点）为极点，椭圆的长轴为极轴建立极坐标，则行星的轨道方程为

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \theta},$$

这里 $p = \frac{b^2}{a}$ 是焦参数， $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ 是离心率， a 和 b 分别是椭圆的半长轴和半短轴。

设在时刻 t 行星与太阳的距离为 $r = r(t)$ ，它们的连线与极轴的夹角为 $\theta = \theta(t)$ ，则行星的坐标可以用向量记号表示成 $\mathbf{r} = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ 。

记 dA 是极径转过角度 $d\theta$ 所扫过的那块椭圆的面积（阴影部分），由极坐标下的面积公式

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta,$$

由 Kepler 第二定律，单位时间中扫过的面积

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \omega = \text{常数},$$

这里 $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ 表示行星运动的角速度。

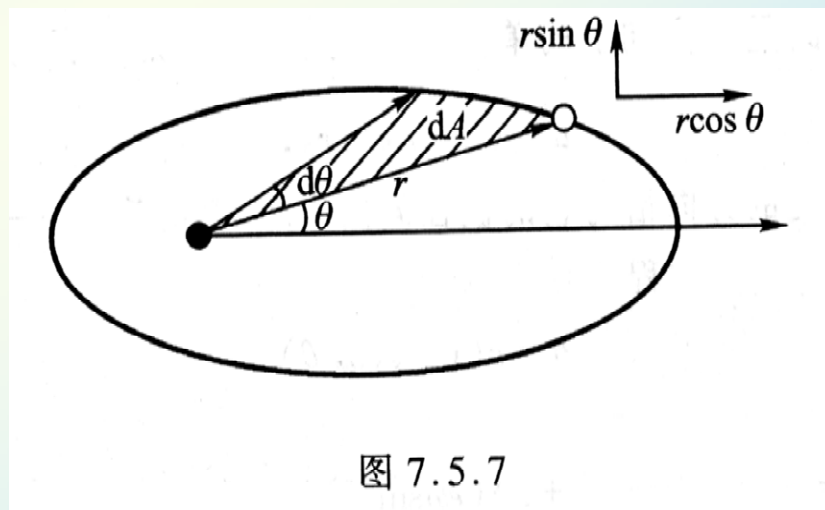


图 7.5.7

记行星绕太阳运行一周的时间为 T ，则经过 T 时间极径所扫过的面积恰为整个椭圆的面积 πab ，即

$$\pi ab = \int_0^T \frac{dA}{dt} dt = \frac{1}{2} r^2 \omega T,$$

因此常数

$$r^2 \omega = \frac{2\pi ab}{T},$$

两边求导后得到

$$(r^2 \omega)' = 2r\dot{r}\omega + r^2\dot{\omega} = 0,$$

即

$$2\dot{r}\omega + r\dot{\omega} = 0。$$

这里记行星沿极径方向的速度和加速度分别为 $\frac{dr}{dt} \equiv \dot{r}$ 和 $\frac{d^2r}{dt^2} \equiv \ddot{r}$ （称为径向速度和径向加速度），角加速度为 $\frac{d\omega}{dt} \equiv \dot{\omega}$ （用字母上面加点表示对 t 的导数是 Newton 的记号）。

于是行星在 x 方向和 y 方向上的加速度分量分别为

$$\begin{aligned}\frac{d^2(r \cos \theta)}{dt} &= \ddot{r} \cos \theta - 2\dot{r}\dot{\omega} \sin \theta - r[\dot{\omega} \sin \theta + \omega^2 \cos \theta] \\ &= (\ddot{r} - r\omega^2) \cos \theta - (2\dot{r}\dot{\omega} + r\dot{\omega}) \sin \theta \\ &= (\ddot{r} - r\omega^2) \cos \theta , \\ \frac{d^2(r \sin \theta)}{dt} &= \ddot{r} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\omega} \cos \theta + r[\dot{\omega} \cos \theta - \omega^2 \sin \theta] \\ &= (2\dot{r}\dot{\omega} + r\dot{\omega}) \cos \theta + (\ddot{r} - r\omega^2) \sin \theta \\ &= (\ddot{r} - r\omega^2) \sin \theta .\end{aligned}$$

记 $\mathbf{r}_0 = \frac{\mathbf{r}}{r} = (\cos \theta, \sin \theta)$ 是 \mathbf{r} 方向上的单位向量，于是，得到加速度向量

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\omega^2) \mathbf{r}_0 ,$$

即行星在任一点的加速度的方向恰与它的极径同向，加速度的值为 $\ddot{r} - r\omega^2$ 。

为了求出 $\ddot{r} - r\omega^2$ ，对椭圆方程

$$p = r(1 - e \cos \theta)$$

两边求二阶导数，注意到 p 是焦参数即常数，

$$\begin{aligned} 0 = \dot{p} &= \ddot{r}(1 - e \cos \theta) + 2\dot{r}(e\omega \sin \theta) + re(\dot{\omega} \sin \theta + \omega^2 \cos \theta) \\ &= \ddot{r} - (\ddot{r} - r\omega^2)e \cos \theta + (2\dot{r}\omega + r\dot{\omega})e \sin \theta \\ &= \ddot{r} - (\ddot{r} - r\omega^2)e \cos \theta \\ &= (\ddot{r} - r\omega^2)(1 - e \cos \theta) + r\omega^2 \\ &= \frac{\ddot{r} - r\omega^2}{r} \cdot p + r\omega^2, \end{aligned}$$

所以

$$\ddot{r} - r\omega^2 = -\frac{(r^2\omega)^2}{r^2} \cdot \frac{1}{p} = -\frac{4\pi^2 a^2 b^2}{T^2} \frac{a}{b^2} \cdot \frac{1}{r^2} = -4\pi^2 \cdot \frac{a^3}{T^2} \cdot \frac{1}{r^2} \circ$$

最后，由 Newton 第二运动定律和 Kepler 第三定律即 $\frac{a^3}{T^2} = \text{常数}$ ，
便有

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = m\mathbf{a} &= m(\ddot{\mathbf{r}} - r\omega^2)\mathbf{r}_0 = -\left(\frac{4\pi^2}{M} \cdot \frac{a^3}{T^2}\right) \cdot \frac{Mm}{r^2} \mathbf{r}_0 \\ &= -\left(\frac{4\pi^2}{M} \cdot \frac{a^3}{T^2}\right) \cdot \frac{Mm}{r^2} \mathbf{r}_0 = -G \frac{Mm}{r^2} \mathbf{r}_0, \end{aligned}$$

这里 M 是太阳的质量，

$$G = \frac{4\pi^2}{M} \frac{a^3}{T^2} \approx 6.67 \times 10^{-11} \quad (\text{m}^3 / \text{kg} \cdot \text{s}^2)$$

称为**引力常量**。

导出万有引力定律是人类历史上最成功的数学模型之一，它的结论为以后一系列的观测和实验数据所证实（其中最为人津津乐道的是发现海王星），它的适用范围从天体运动一直延展到微观世界，令人信服地定量地解释了许多既有的物理现象，并成为探索未知世界的有力工具。