第十章　　函数项级数

§1　函数项级数的一致收敛性

点态收敛

设 $u_n(x)$（$n=1,2,3,\cdots$）是具有公共定义域 **E** 的一列函数，这无穷个函数的“和”

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$$

称为**函数项级数**，记为 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$。

定义 10.1.1 设 $u_n(x)$ （$n=1,2,3,\cdots$）在 $\mathbf{E}$ 上定义。对于任意固定的 $x_0\in\mathbf{E}$，若数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$ 收敛，则称函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在点 x_0 收敛，或称 x_0 是 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的**收敛点**。

函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的收敛点全体所构成的集合称为函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的**收敛域**。

设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的收敛域为 $\mathbf{D} \subset \mathbf{E}$，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$就定义了集合 $\mathbf{D}$ 上的一个函数

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad x \in \mathbf{D} \text{ 。}$$

$S(x)$称为$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的**和函数**。由于这是通过逐点定义的方式得到的，因此称$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在 $\mathbf{D}$ 上**点态收敛**于 $S(x)$。

例 10.1.1 利用我们目前所掌握的知识（如级数收敛的 Cauchy 判别法，D'Alembert 判别法等）和定义 10.1.1，可知下述结论：

$\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ 的收敛域是 $(-1,1)$，和函数为 $S(x)=\dfrac{x}{1-x}$；

例 10.1.1 利用我们目前所掌握的知识（如级数收敛的 Cauchy 判别法，D'Alembert 判别法等）和定义 10.1.1，可知下述结论：

$\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ 的收敛域是 $(-1,1)$，和函数为 $S(x)=\dfrac{x}{1-x}$；

$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$ 的收敛域为 $[-1,1)$；

$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^2}$ 的收敛域 $[-1,1]$；

例 10.1.1 利用我们目前所掌握的知识（如级数收敛的 Cauchy 判别法，D'Alembert 判别法等）和定义 10.1.1，可知下述结论：

$\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ 的收敛域是 $(-1,1)$，和函数为 $S(x)=\dfrac{x}{1-x}$；

$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$ 的收敛域为 $[-1,1)$；

$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^2}$ 的收敛域 $[-1,1]$；

$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ 的收敛域为 $\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$；

$\sum_{n=1}^{\infty} (n!)x^n$ 的收敛域为单点集 $\{0\}$；

$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-nx}$ 的收敛域为 $(0,+\infty)$，和函数为 $S(x)=\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}$。

给定一个函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$，可以作出它的**部分和函数**

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x), \quad x \in \mathbf{E};$$

显然，使$\{S_n(x)\}$收敛的 x 全体正是级数的收敛域 $\mathbf{D}$ 。因此在 $\mathbf{D}$ 上，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的和函数 $S(x)$就是其部分和函数序列$\{S_n(x)\}$的极限，即有

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k(x), \quad x \in \mathbf{D}。$$

反过来，若给定一个函数序列 $\{S_n(x)\}$ ($x\in \mathbf{E}$)，只要令

$$\begin{cases} u_1(x) = S_1(x), \\ u_{n+1}(x) = S_{n+1}(x) - S_n(x) \qquad (n = 1,2,\cdots), \end{cases}$$

就可得到相应的函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$，它的部分和函数序列就是 $\{S_n(x)\}$。

反过来，若给定一个函数序列 $\{S_n(x)\}$ ($x\in\mathbf{E}$)，只要令

$$\begin{cases} u_1(x) = S_1(x), \\ u_{n+1}(x) = S_{n+1}(x) - S_n(x) \qquad (n = 1,2,\cdots), \end{cases}$$

就可得到相应的函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$，它的部分和函数序列就是 $\{S_n(x)\}$。

所以，函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 与函数序列 $\{S_n(x)\}$ 的收敛性在本质上完全是一回事。为方便起见，下面将经常通过讨论函数序列来研究函数项级数的性质。

函数项级数(或函数序列)的基本问题

设有限个函数 $u_1(x)$，$u_2(x)$，$\cdots$，$u_n(x)$在 **D** 上定义且具有某种分析性质，如连续性、可导性和 Riemann 可积性（以下就称可积性）等，则它们的和函数

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)$$

在 **D** 上仍保持同样的分析性质，

函数项级数(或函数序列)的基本问题

设有限个函数 $u_1(x)$，$u_2(x)$，…，$u_n(x)$在 **D** 上定义且具有某种分析性质，如连续性、可导性和 Riemann 可积性（以下就称可积性）等，则它们的和函数

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)$$

在 **D** 上仍保持同样的分析性质，

例如，其和函数的极限（或导数、积分）可以通过对每个函数分别求极限（或导数、积分）后再求和来得到，即成立

(a) $\lim\limits_{x\to x_0}[u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}u_1(x)+\lim\limits_{x\to x_0}u_2(x)+\cdots+\lim\limits_{x\to x_0}u_n(x)$

(b) $\dfrac{d}{dx}[u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)]=\dfrac{d}{dx}u_1(x)+\dfrac{d}{dx}u_2(x)+\cdots+\dfrac{d}{dx}u_n(x)$

(c) $\int_a^b[u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)]\,dx=\int_a^b u_1(x)\,dx+\int_a^b u_2(x)\,dx+\cdots+\int_a^b u_n(x)\,dx$

这些性质给我们带来了很大的方便。

对于函数项级数，我们面对的是无限个 $u_n(x)$（$n=1,2,3,\cdots$），它们的和函数 $S(x)$大多是不知道的，因此只能借助 $u_n(x)$的分析性质来间接地获得 $S(x)$的分析性质。那么很自然地，我们希望在一定条件下，上述运算法则可以推广到无限个函数求和的情况。

对于函数项级数，我们面对的是无限个 $u_n(x)$（$n = 1,2,3,\cdots$），它们的和函数 $S(x)$大多是不知道的,因此只能借助 $u_n(x)$的分析性质来间接地获得 $S(x)$的分析性质。那么很自然地，我们希望在一定条件下，上述运算法则可以推广到无限个函数求和的情况。

这个问题是函数项级数(或函数序列)研究中的基本问题，其实质是极限（或求导、求积分）运算与无限求和运算在什么条件下可以交换次序（由于求导、求积分与无限求和均可看作特殊的极限运算，因此更一般地，可将其统一视为两种极限运算的交换次序）。下面我们将会看到，仅要求 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 **D** 上点态收敛是不够的。

(1) 将性质(a)推广到无限个函数的情况，是指当 $u_n(x)$在 $\mathbf{D}$ 上连续时，和函数 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 也在 $\mathbf{D}$ 上连续，并且成立

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to x_0}u_n(x),$$

即极限运算与无限求和运算可以交换次序（也称函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 可以逐项求极限）。

(1) 将性质(a)推广到无限个函数的情况，是指当 $u_n(x)$在 $\mathbf{D}$ 上连续时，和函数 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 也在 $\mathbf{D}$ 上连续，并且成立

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to x_0}u_n(x),$$

即极限运算与无限求和运算可以交换次序（也称函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 可以**逐项求极限**）。

对于函数序列$\{S_n(x)\}$而言，相应的结论是极限函数 $S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)$ 也在 $\mathbf{D}$ 上连续，并且成立

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0}S_n(x),$$

即两种极限运算可以交换次序。

下面的例子说明，在点态收敛的情况下，上述性质不一定成立。

例 10. 1. 2 设 $S_n(x) = x^n$，则$\{S_n(x)\}$在区间$(-1,1]$上收敛，极限函数为

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

虽然对一切 n，$S_n(x)$在$(-1,1]$上连续（也是可导的），但极限函数 $S(x)$ 在 $x = 1$ 不连续 (当然更谈不上在 $x = 1$ 可导)。

(2) 将性质(b)推广到无限个函数的情况，是指当 $u_n(x)$在 **D** 上可导时，和函数 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$也在 **D** 上可导，并且成立

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u_n(x),$$

即求导运算与无限求和运算可以交换次序（也称函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$可以逐项求导）。

(2) 将性质(b)推广到无限个函数的情况，是指当 $u_n(x)$在 **D** 上可导时，和函数 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 也在 **D** 上可导，并且成立

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u_n(x),$$

即求导运算与无限求和运算可以交换次序（也称函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 可以**逐项求导**）。

对于函数序列$\{S_n(x)\}$而言，相应的结论是极限函数 $S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)$ 也在 **D** 上可导，并且成立

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}S_n(x),$$

即求导运算与极限运算可以交换次序。

例 10.1.2 已说明在点态收敛情况下，和函数(或极限函数)可能不可导；下例说明，即使和函数(或极限函数)可导，上述两等式也不一定成立。

例 10. 1. 3 设 $S_n(x)=\dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}}$，则$\{S_n(x)\}$在$(-\infty,+\infty)$上收敛，极限函数为 $S(x) = 0$，从而导函数$S'(x) = 0$。

由于

$$S_n'(x) = \sqrt{n}\cos nx,$$

因此 $S_n(x)$的导函数所构成的序列$\{S_n'(x)\}$并不收敛于$S'(x)$ （例如当 $x = 0$，$S_n'(0) = \sqrt{n} \to +\infty$ ）。

(3) 将性质 (c) 推广到无限个函数的情况，是指当 $u_n(x)$在闭区间$[a, b]\subset \mathbf{D}$ 上可积时，和函数 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 也在$[a, b]$上可积，并且成立

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\,\mathrm{d}x,$$

即求积分运算与无限求和运算可以交换次序（也称函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$可以逐项求积分）。

(3) 将性质 (c) 推广到无限个函数的情况，是指当 $u_n(x)$在闭区间$[a, b]\subset \mathbf{D}$ 上可积时，和函数 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 也在$[a, b]$上可积，并且成立

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

即求积分运算与无限求和运算可以交换次序（也称函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$可以**逐项求积分**）。

对于函数序列$\{S_n(x)\}$而言，相应的结论是极限函数 $S(x)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)$也在区间$[a, b]$上可积，并且成立

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} S_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)\,\mathrm{d}x,$$

即求积分运算与极限运算可以交换次序。

下面例 10.1.4 和例 10.1.5 将说明, 在点态收敛情况下, 和函数(或极限函数)可能不可积；即使可积，上述两等式也不一定成立。

下面例 10.1.4 和例 10.1.5 将说明，在点态收敛情况下，和函数(或极限函数)可能不可积；即使可积，上述两等式也不一定成立。

例 10.1.4 设

$$S_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{当} x \cdot n! \text{为整数}, \\ 0, & \text{当} x \text{为其他值}, \end{cases} \qquad x \in [0,1].$$

显然，对每一个 $n \in \mathbf{N}^+$，$S_n(x)$在$[0,1]$上有界，至多只有有限个不连续点，因而是可积的。

但是，当 x 是无理数时，对一切 n，$S_n(x) = 0$，因此 $S(x)=\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = 0$；当 x 是有理数$\dfrac{q}{p}$（$p \in \mathbf{N}^+$，$q \in \mathbf{N}$，$q \le p$）时，对于 $n \ge p$，$S_n(x) = 1$，因此 $S(x)=\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)=1$。所以，$\{S_n(x)\}$的极限函数 $S(x)$就是熟知的 Dirichlet 函数，它在$[0,1]$上是不可积的。

例 10.1.5 设 $S_n(x)=nx(1-x^2)^n$，则$\{S_n(x)\}$在区间$[0,1]$上收敛于极限函数 $S(x)=0$。显然对任意 n，$S_n(x)$与 $S(x)$都在$[0,1]$上可积，但是

$$\int_0^1 S_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 nx(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x=-\frac{n}{2}\int_0^1(1-x^2)^n\,\mathrm{d}(1-x^2)$$

$$=\frac{n}{2(n+1)}\not\longrightarrow\int_0^1 S(x)\,\mathrm{d}x \quad （n\to\infty）。$$

例 10.1.5 设 $S_n(x) = nx(1-x^2)^n$，则$\{S_n(x)\}$在区间$[0,1]$上收敛于极限函数 $S(x)=0$。显然对任意 n，$S_n(x)$与 $S(x)$都在$[0,1]$上可积，但是

$$\int_0^1 S_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 nx(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x = -\frac{n}{2}\int_0^1 (1-x^2)^n\,\mathrm{d}(1-x^2)$$

$$= \frac{n}{2(n+1)} \not\longrightarrow \int_0^1 S(x)\,\mathrm{d}x \qquad (n\to\infty)。$$

上述例子说明，为了解决这类交换运算次序问题，需要引进比“点态收敛”要求更强的新的收敛概念。

函数项级数(或函数序列)的一致收敛性

“函数序列$\{S_n(x)\}$在集合 $\mathbf{D}$ 上(点态)收敛于 $S(x)$”是指对于任意 $x_0\in\mathbf{D}$，数列$\{S_n(x_0)\}$收敛于 $S(x_0)$。也就是：对任意给定的$\varepsilon>0$，可以找到正整数 N，当 $n>N$ 时，成立：

$$|S_n(x_0)-S(x_0)|<\varepsilon。$$

这里的 N 应理解为 $N(x_0,\varepsilon)$，即 N 不仅与ε有关，而且随着x_0的变化而变化。

函数项级数(或函数序列)的一致收敛性

“函数序列$\{S_n(x)\}$在集合 **D** 上(点态)收敛于 $S(x)$”是指对于任意 $x_0 \in \mathbf{D}$ ，数列$\{S_n(x_0)\}$收敛于 $S(x_0)$。也就是：对任意给定的$\varepsilon > 0$，可以找到正整数 N ，当 $n > N$ 时，成立：

$$|S_n(x_0) - S(x_0)| < \varepsilon 。$$

这里的 N 应理解为 $N(x_0, \varepsilon)$，即 N 不仅与ε有关，而且随着x_0的变化而变化。

我们希望$\{S_n(x)\}$不仅在 **D** 上点点收敛于 $S(x)$, 而且在 **D** 上的收敛速度具有某种整体一致性。也就是希望在上面的定义中，存在一个仅与ε有关，而与x_0无关的 $N = N(\varepsilon)$。

定义 10.1.2 设$\{S_n(x)\}$（$x\in\mathbf{D}$）是一函数序列，若对任意给定的$\varepsilon>0$，存在仅与ε有关的正整数$N(\varepsilon)$，当$n>N(\varepsilon)$时，

$$|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$$

对一切$x\in\mathbf{D}$成立，则称$\{S_n(x)\}$在$\mathbf{D}$上**一致收敛**于$S(x)$，记为

$$S_n(x)\overset{D}{\Rightarrow}S(x)。$$

若函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$（$x\in\mathbf{D}$）的部分和函数序列$\{S_n(x)\}$，$S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(x)$，在$\mathbf{D}$上一致收敛于$S(x)$，则我们称$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$\mathbf{D}$上一致收敛于$S(x)$。

采用符号表述的话，就是：

$$\text{“}S_n(x)\overset{D}{\Rightarrow}S(x)\text{”}\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists N,\ \forall n>N,\ \forall x\in\mathbf{D}:$$

$$|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon;$$

和

$$\text{“}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\text{ 在 }\mathbf{D}\text{ 上一致收敛于 }S(x)\text{”}\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists N,\ \forall n>N,\ \forall x\in\mathbf{D}:$$

$$\left|\sum_{k=1}^{n}u_k(x)-S(x)\right|=|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon。$$

图 10.1.1 给出了一致收敛性的几何描述：对任意给定的$\varepsilon>0$，存在$N=N(\varepsilon)$，当$n>N(\varepsilon)$时，函数$y=S_n(x)$（$x\in\mathbf{D}$）的图象都落在带状区域

$$\{(x,y)\mid x\in\mathbf{D},\ S(x)-\varepsilon<y<S(x)+\varepsilon\}$$

之中。

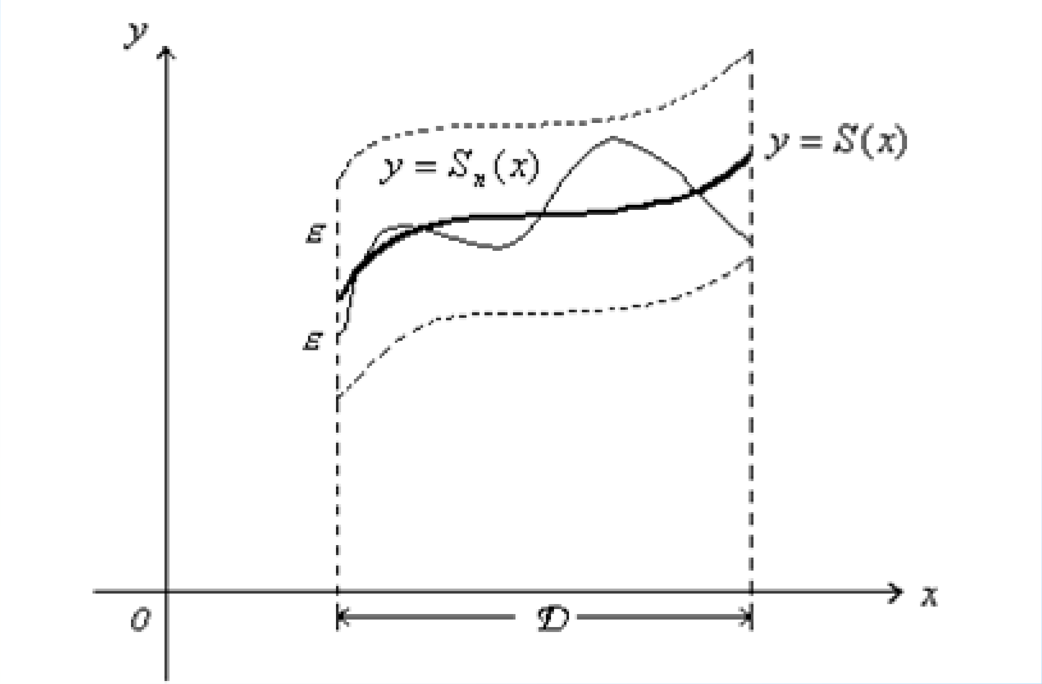

图 10.1.1

推论 10.1.1 若函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在 **D** 上一致收敛，则函数序列$\{u_n(x)\}$在 **D** 上一致收敛于$u(x)=0$。

推论 10.1.1 若函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在 **D** 上一致收敛，则函数序列$\{u_n(x)\}$在 **D** 上一致收敛于$u(x)=0$。

由于函数项级数的一致收敛性本质上就是部分和函数序列的一致收敛性，下面我们仅对函数序列举例讨论。

推论 10.1.1 若函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在 D 上一致收敛，则函数序列$\{u_n(x)\}$在 D 上一致收敛于$u(x)=0$。

由于函数项级数的一致收敛性本质上就是部分和函数序列的一致收敛性，下面我们仅对函数序列举例讨论。

例 10.1.6 设 $S_n(x)=\dfrac{x}{1+n^2x^2}$，则$\{S_n(x)\}$在$(-\infty,+\infty)$收敛于极限函数 $S(x)=0$。

因为

$$|S_n(x)-S(x)|=\frac{|x|}{1+n^2x^2}\le\frac{1}{2n},$$

所以对任意给定的$\varepsilon>0$，只要取 $N=\left[\dfrac{1}{2\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，

$$|S_n(x)-S(x)|\le\frac{1}{2n}<\varepsilon$$

对一切$x\in(-\infty,+\infty)$成立，因此$\{S_n(x)\}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛于 $S(x)=0$。

从几何上看(图 10.1.2), 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 只要取 $N = \left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]$, 当 $n > N$ 时，函数 $y = S_n(x)$， $x \in (-\infty, +\infty)$， 的图象都落在带状区域 $\{(x, y) \mid |y| < \varepsilon\}$ 中。

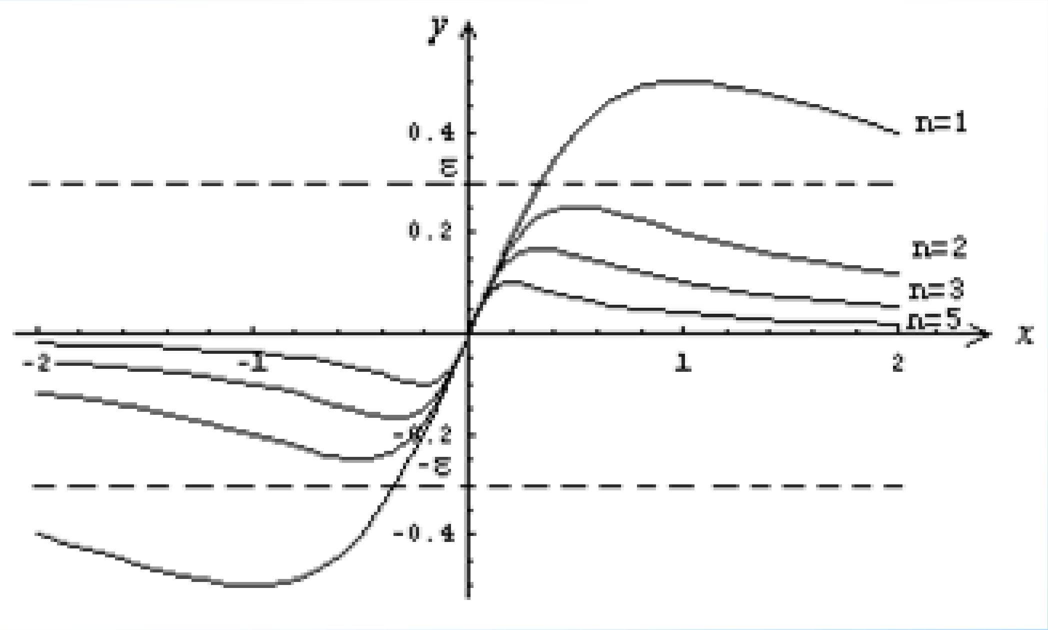

图 10.1.2

例 10. 1. 7　设 $S_n(x)=x^n$（见例 10.1.2），考察$\{S_n(x)\}$在区间$[0,1)$上的一致收敛性。

对任意给定的 $0<\varepsilon<1$，要使

$$|S_n(x)-S(x)|=x^n<\varepsilon,$$

必须

$$n>\frac{\ln\varepsilon}{\ln x},$$

因此 $N=N(x,\varepsilon)$至少须取$\left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln x}\right]$。由于当$x\to 1-$时，$\frac{\ln\varepsilon}{\ln x}\to+\infty$，因此不可能找到对一切$x\in[0,1)$都适用的 $N=N(\varepsilon)$，换言之，$\{S_n(x)\}$在$[0,1)$上不是一致收敛的。

从几何上看（图 10.1.3），对每个 n，函数 $y=x^n$ 的取值范围(即值域)都是 $[0,1)$，因此它们的图象不可能落在带状区域 $\{(x,y)\mid x\in[0,1),\ 0<y<\varepsilon\}$ 中。

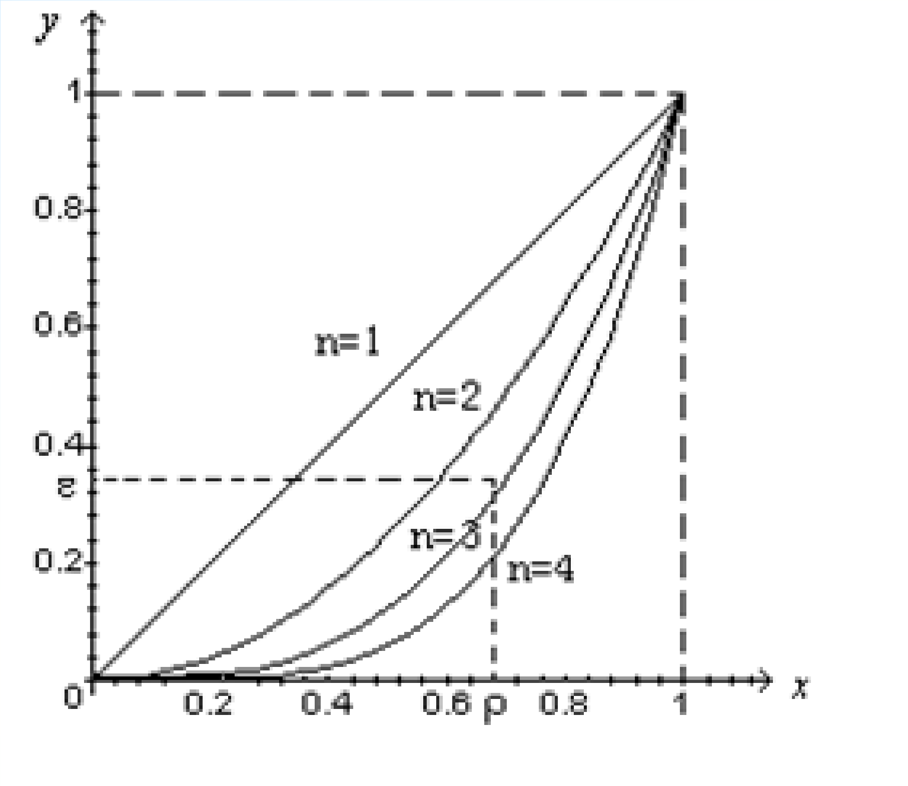

图 10. 1. 3

定义 10.1.3 若对于任意给定的闭区间 $[a, b] \subset \mathbf{D}$，函数序列 $\{S_n(x)\}$在$[a, b]$ 上一致收敛于 $S(x)$，则称$\{S_n(x)\}$在 $\mathbf{D}$ 上**内闭一致收敛**于 $S(x)$。

显然，在 $\mathbf{D}$ 上一致收敛的函数序列必在 $\mathbf{D}$ 上内闭一致收敛，但其逆命题不成立。

例如，将例 10.1.7 中考察的区间$[0,1)$缩小为$[0,\rho]$，其中$0<\rho<1$是任意的，则由

$$|S_n(x)-S(x)|=x^n<\rho^n,$$

只要取 $N=N(\varepsilon)=\left[\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln\rho}\right]$，当 $n>N$ 时，

$$|S_n(x)-S(x)|<\rho^n<\varepsilon$$

对一切$x\in[0,\rho]$成立，即$\{S_n(x)\}$在$[0,\rho]$ $(\rho<1)$上是一致收敛的。也就是说，尽管$\{x^n\}$在$[0,1)$上不一致收敛，但却是内闭一致收敛的。

从图 10.1.3 中可以看出，随着 n 的增大，函数 $y=x^n$ 在区间 $[0,\rho]$ 上的图象越来越接近 x 轴，从而全部落在带状区域 $\{(x,y)\,|\,0\le x\le\rho,\,0\le y\le\varepsilon\}$ 中。

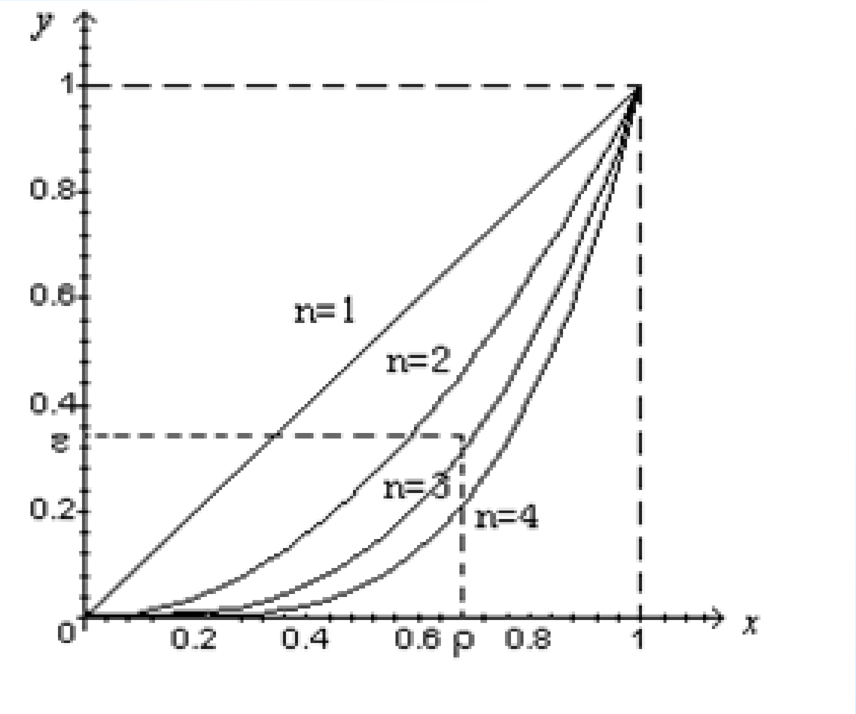

图 10.1.3

下面我们建立关于一致收敛的两个充分必要条件，它们将有助于对一致收敛性进行判断。

定理 10.1.1 设函数序列$\{S_n(x)\}$在集合 **D** 上点态收敛于 $S(x)$，定义 $S_n(x)$与 $S(x)$的“距离”为

$$\mathrm{d}(S_n, S) = \sup_{x\in\mathbf{D}} |S_n(x) - S(x)|,$$

则$\{S_n(x)\}$在 **D** 上一致收敛于 $S(x)$的充分必要条件是：

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{d}(S_n, S) = 0。$$

证　　设$\{S_n(x)\}$在 $\mathbf{D}$ 上一致收敛于 $S(x)$，则对任意给定的$\varepsilon>0$，存在 $N=N(\varepsilon)$，当 $n>N$ 时，

$$|S_n(x)-S(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

对一切 $x\in\mathbf{D}$ 成立，于是对 $n>N$，

$$\mathrm{d}(S_n, S)\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,$$

这就说明

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{d}(S_n, S)=0。$$

证　设$\{S_n(x)\}$在 $\mathbf{D}$ 上一致收敛于 $S(x)$，则对任意给定的$\varepsilon>0$，存在 $N=N(\varepsilon)$，当 $n>N$ 时，

$$|S_n(x)-S(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

对一切 $x\in\mathbf{D}$ 成立，于是对 $n>N$，

$$\mathrm{d}(S_n,S)\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,$$

这就说明

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{d}(S_n,S)=0。$$

反过来，若$\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{d}(S_n,S)=0$，则对任意给定的$\varepsilon>0$，存在 $N=N(\varepsilon)$，当 $n>N$ 时，

$$\mathrm{d}(S_n,S)<\varepsilon,$$

此式表明

$$|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$$

对一切 $x\in\mathbf{D}$ 成立，所以$\{S_n(x)\}$在 $\mathbf{D}$ 上一致收敛于 $S(x)$。

对于例 10.1.6 中的 $S_n(x)=\dfrac{x}{1+n^2x^2}$， $x\in(-\infty,+\infty)$， 由于

$$|S_n(x)-S(x)|=\frac{|x|}{1+n^2x^2}\le\frac{1}{2n},$$

等号成立当且仅当 $x=\pm\dfrac{1}{n}$， 可知

$$\mathrm{d}\,(S_n, S)=\frac{1}{2n}\to 0 \quad（n\to\infty）,$$

因此$\{S_n(x)\}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛于 $S(x)=0$。

对于例 10.1.6 中的 $S_n(x)=\dfrac{x}{1+n^2x^2}$， $x\in(-\infty,+\infty)$， 由于

$$|S_n(x)-S(x)|=\frac{|x|}{1+n^2x^2}\le\frac{1}{2n},$$

等号成立当且仅当 $x=\pm\dfrac{1}{n}$， 可知

$$d(S_n,S)=\frac{1}{2n}\to 0\quad(n\to\infty),$$

因此$\{S_n(x)\}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛于 $S(x)=0$。

对于例 10.1.7 中的 $S_n(x)=x^n$， $x\in[0,1)$， 由于

$$d(S_n,S)=\sup_{0\le x<1}x^n=1\not\to 0\quad(n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在$[0,1)$上不是一致收敛的。

例 10.1.8 设 $S_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$，则$\{S_n(x)\}$在$(0,+\infty)$上收敛于 $S(x)=0$，由于

$$|S_n(x)-S(x)|=\frac{nx}{1+n^2x^2}\le\frac{1}{2},$$

等号成立当且仅当 $x=\dfrac{1}{n}$，可知

$$\mathrm{d}(S_n,S)=\frac{1}{2}\not\to 0\quad(n\to\infty),$$

因此$\{S_n(x)\}$在$(0,+\infty)$上不是一致收敛的。

从几何上看(图 10.1.4)，对每个 n，函数 $y=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ 在 $x=\dfrac{1}{n}$ 取到最大值 $\dfrac{1}{2}$，因此它们的图象不可能落在带状区域 $\{(x,y)\mid 0<x<+\infty, |y|<\varepsilon<1/2\}$ 中。事实上，$\{S_n(x)\}$在任意包含 $x=0$ 或以 $x=0$ 为端点的区间上都不是一致收敛的。

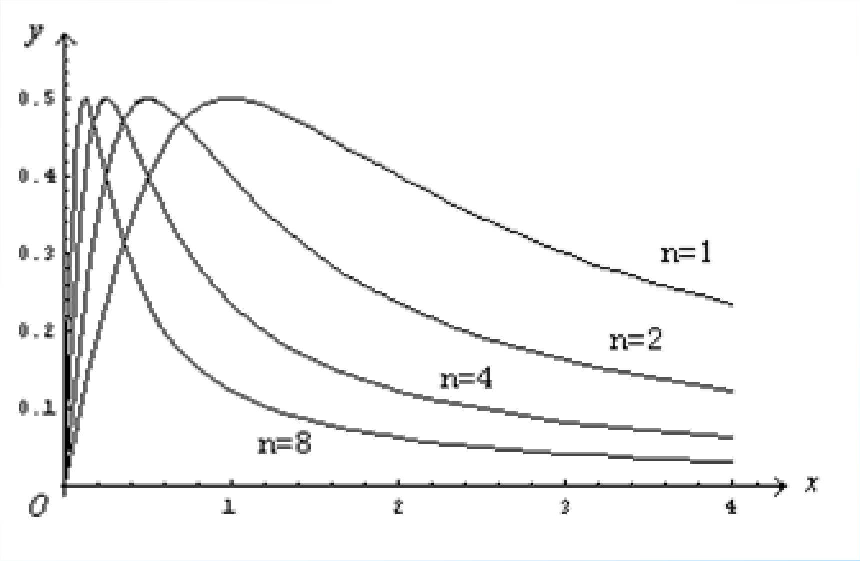

图 10.1.4

若将上例中$\{S_n(x)\}$限制在任意有限区间$[\rho, A]$（$0<\rho<A<+\infty$）上，则由$|S_n(x)-S(x)|=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$及

$$\left(\frac{nx}{1+n^2x^2}\right)'=\frac{n(1-n^2x^2)}{(1+n^2x^2)^2},$$

可知当$n>\dfrac{1}{\rho}$时，$|S_n(x)-S(x)|$在$[\rho, A]$上单调减少，从而

$$\mathrm{d}\,(S_n\,,S)=\frac{n\rho}{1+n^2\rho^2}\to 0\quad（n\to\infty），$$

这说明$\{S_n(x)\}$在$[\rho, A]$上一致收敛于$S(x)=0$。也就是说，$\{S_n(x)\}$在$(0,+\infty)$上内闭一致收敛。

例 10.1.9　设 $S_n(x) = (1- x)x^n$，则$\{S_n(x)\}$在$[0,1]$上收敛于 $S(x) = 0$。由 $|S_n(x)-S(x)| = (1- x)x^n$ 及

$$\left[(1-x)x^n\right]' = x^{n-1}[n-(n+1)x],$$

可知 $|S_n(x)-S(x)|$ 在 $x = \dfrac{n}{n+1}$ 取到最大值，从而

$$d(S_n, S) = \left(1-\frac{n}{n+1}\right)\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{1}{n+1}\right)\Big/\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to 0 \quad (n\to\infty),$$

这说明$\{S_n(x)\}$在$[0,1]$上一致收敛于 $S(x) = 0$。

例 10.1.10 设$S_n(x)=\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$，则$\{S_n(x)\}$在$[0,+\infty)$上收敛于$S(x)=e^x$。证明$\{S_n(x)\}$在$[0,a]$上一致收敛（$a$是任意正数）。

例 10.1.10 设$S_n(x)=\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$，则$\{S_n(x)\}$在$[0,+\infty)$上收敛于$S(x)=e^x$。证明$\{S_n(x)\}$在$[0,a]$上一致收敛（$a$是任意正数）。

证 由于函数

$$\varphi(x)=e^{-x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

满足

$$\varphi'(x)=-e^{-x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}\frac{x}{n}\le 0，\quad x\in[0,a]，$$

所以$\varphi(x)$在$[0,a]$上是单调减少函数，且$\varphi(0)=1$，$\varphi(a)=e^{-a}\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n$。从而

$$e^{-a}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n\le e^{-x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\le 1，\quad x\in[0,a]。$$

所以

$$|S_n(x)-S(x)|=\left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-e^x\right|=e^x\left|e^{-x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-1\right|\le e^a\left(1-e^{-a}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n\right),\quad x\in[0,a],$$

于是

$$0\le d(S_n,S)\le e^a\left(1-e^{-a}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n\right)。$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}e^a\left(1-e^{-a}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n\right)=0,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}d(S_n,S)=0。$$

这就说明$\{S_n(x)\}$在$[0,a]$上一致收敛于$S(x)=e^x$。

定理 10.1.2 设函数序列$\{S_n(x)\}$在集合 $\mathbf{D}$ 上点态收敛于 $S(x)$，则$\{S_n(x)\}$在$\mathbf{D}$上一致收敛于$S(x)$的充分必要条件是：对任意数列$\{x_n\}$，$x_n \in \mathbf{D}$，成立

$$\lim_{n\to\infty}(S_n(x_n)-S(x_n)) = 0。$$

定理 10.1.2　设函数序列$\{S_n(x)\}$在集合 $\mathbf{D}$ 上点态收敛于 $S(x)$，则$\{S_n(x)\}$在 $\mathbf{D}$ 上一致收敛于 $S(x)$的充分必要条件是：对任意数列$\{x_n\}$，$x_n \in \mathbf{D}$，成立

$$\lim_{n\to\infty}(S_n(x_n)-S(x_n)) = 0。$$

证　先证必要性。设$\{S_n(x)\}$在 $\mathbf{D}$ 上一致收敛于 $S(x)$，则

$$\mathrm{d}(S_n, S) = \sup_{x\in\mathbf{D}} |S_n(x)-S(x)| \to 0 \quad (n\to\infty),$$

于是对任意数列$\{x_n\}$，$x_n \in \mathbf{D}$，成立

$$|S_n(x_n)-S(x_n)| \le \mathrm{d}(S_n, S) \to 0 \quad (n\to\infty)。$$

关于充分性，我们采用反证法，也就是证明：若$\{S_n(x)\}$在 **D** 上不一致收敛于 $S(x)$，则一定能找到数列$\{x_n\}$，$x_n \in \mathbf{D}$，使得

$$S_n(x_n) - S(x_n) \not\longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)。$$

由于命题“$\{S_n(x)\}$在 **D** 上一致收敛于 $S(x)$”可以表述为

$$\forall \varepsilon > 0，\exists N，\forall n > N，\forall x \in \mathbf{D}：\quad |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon，$$

因此它的否定命题“$\{S_n(x)\}$在 **D** 上不一致收敛于 $S(x)$”可以表述为：

$$\exists \varepsilon_0 > 0，\forall N > 0，\exists n > N，\exists x \in \mathbf{D}：\quad |S_n(x) - S(x)| \geq \varepsilon_0。$$

于是，下述步骤可以依次进行：

取 $N_1=1$，$\exists n_1>1$，$\exists x_{n_1}\in\mathbf{D}$：$\left|S_{n_1}(x_{n_1})-S(x_{n_1})\right|\geq\varepsilon_0$，

取 $N_2=n_1$，$\exists n_2>n_1$，$\exists x_{n_2}\in\mathbf{D}$：$\left|S_{n_2}(x_{n_2})-S(x_{n_2})\right|\geq\varepsilon_0$，

……

取 $N_k=n_{k-1}$，$\exists n_k>n_{k-1}$，$\exists x_{n_k}\in\mathbf{D}$：$\left|S_{n_k}(x_{n_k})-S(x_{n_k})\right|\geq\varepsilon_0$，

……。

对于 $m\in\mathbf{N}^+\setminus\{n_1, n_2, \cdots, n_k, \cdots\}$，可以任取 $x_m\in\mathbf{D}$，这样就得到数列$\{x_n\}$，$x_n\in\mathbf{D}$，由于它的子列$\{x_{n_k}\}$使得

$$\left|S_{n_k}(x_{n_k})-S(x_{n_k})\right|\geq\varepsilon_0,$$

显然不可能成立

$$\lim_{n\to\infty}(S_n(x_n)-S(x_n))=0\quad。$$

定理 10.1.2 常用于判断函数序列的不一致收敛。

对例 10.1.7 中的 $S_n(x) = x^n$， $x \in [0,1)$， 可以取 $x_n = 1 - \frac{1}{n} \in [0,1)$， 则

$$S_n(x_n) - S(x_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \to \frac{1}{\mathrm{e}} \quad （n \to \infty），$$

这说明$\{S_n(x)\}$在$[0,1)$上不一致收敛于 $S(x) = 0$；

对例 10.1.8 中的 $S_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$， $x \in (0,+\infty)$， 可以取 $x_n = \frac{1}{n}$， 则

$$S_n(x_n) - S(x_n) = \frac{1}{2}$$

同样也说明$\{S_n(x)\}$在$(0,+\infty)$上不一致收敛于 $S(x) = 0$。

例 10. 1. 11 设 $S_n(x) = nx(1-x^2)^n$，$x \in [0,1]$（见例 10.1.5），则$\{S_n(x)\}$在$[0,1]$上收敛于 $S(x)=0$。取 $x_n = \dfrac{1}{n} \in [0,1]$， 则

$$S_n(x_n) - S(x_n) = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \to 1 \quad (n \to \infty),$$

这说明$\{S_n(x)\}$在$[0,1]$上不一致收敛于 $S(x)=0$。

例 10. 1. 11 设 $S_n(x) = nx(1-x^2)^n$，$x \in [0,1]$（见例 10.1.5），则 $\{S_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上收敛于 $S(x) = 0$。取 $x_n = \frac{1}{n} \in [0,1]$，则

$$S_n(x_n) - S(x_n) = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \to 1 \quad (n \to \infty),$$

这说明 $\{S_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛于 $S(x) = 0$。

例 10. 1. 12 设 $S_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$，则 $\{S_n(x)\}$ 在 $[0,+\infty)$ 上收敛于 $S(x) = e^x$。证明 $\{S_n(x)\}$ 在 $[0,+\infty)$ 上不一致收敛 (见例 10.1.10)。

证 取 $x_n = n$，则

$$S_n(x_n) - S(x_n) = 2^n - e^n \to -\infty \quad (n \to \infty),$$

由定理 10.1.2，$\{S_n(x)\}$ 在 $[0,+\infty)$ 上不一致收敛于 $S(x) = e^x$。

例 10. 1. 13 证明函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$在$(-1,1)$上不一致收敛（注意该函数项级数的收敛域为$(-1,1)$）。

证 记

$$u_n(x)=n\left(x+\frac{1}{n}\right)^n,$$

则函数序列$\{u_n(x)\}$在$(-1,1)$上收敛于$u(x)=0$。

由推论 10.1.1 知，要证明$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$在$(-1,1)$上不一致收敛，只要证明函数序列$\{u_n(x)\}$在$(-1,1)$上不一致收敛于$u(x)=0$即可。

取$x_n=1-\frac{1}{n}\in(-1,1)$，则

$$u_n(x_n)-u(x_n)=n\to\infty \quad (n\to\infty),$$

由定理 10.1.2，$\{u_n(x)\}$在$(-1,1)$上不一致收敛于$u(x)=0$。