复旦大学数学科学学院

2017～2018 学年第一学期期末考试试卷

A 卷（共八页）

课程名称：高等数学 B（上）　课程代码：MATH120003

开课院系：数学科学学院　考试形式：闭卷

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总 分
得 分										

一（ 36 分，每小题 6 分，共 6 小题 ）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} ln(1+x)ln(1+\frac{1}{x})$ 的值。

解： $\lim\limits_{x\to+\infty} ln(1+x)ln(1+\frac{1}{x}) = \lim\limits_{x\to+\infty} ln(1+x)\frac{1}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1+x} = 0$

2. 设常数 $a>0$，$a\neq 1$，已知 $f(x)=a^{lnx}+(lnx)^a$，求导数 $f'(x)$。

解： $f'(x)=a^{lnx}\cdot lna\cdot\frac{1}{x}+a\cdot(lnx)^{a-1}\cdot\frac{1}{x}$

3. 求不定积分 $\int(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}+\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}})dx$。

解： $\int(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}+\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}})dx=\int\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}dx=arcsin\left(2x-1\right)+c$

该题不定积分还可以是：$arccos\left(1-2x\right)+c$、$2arcsin\sqrt{x}+c$、

$-2arcsin\sqrt{1-x}+c$、$2arctan\sqrt{\frac{x}{1-x}}+c$、$-2arctan\sqrt{\frac{1-x}{x}}+c$ 等。

4. 求由方程 $y+xe^{y}=1$ 确定的隐函数 $y=y(x)$ 在 $x=1$ 处的一阶导数 $\frac{dy}{dx}$。

解： $x=1$ 时 $y=0$，由 $\frac{dy}{dx}+e^{y}+xe^{y}\frac{dy}{dx}=0$，得：$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}=-\frac{1}{2}$

5. 求形式为 $z=a+bx^2+cy^2$ 的曲面方程，使该曲面过点 $M_0(1,-1,4)$ 和曲线

$\begin{cases} z=3-2x^2 \\ y=2 \end{cases}$，并指出该曲面的名称 。

解： 点 $M_0(1,-1,4)$ 在曲面 $z=a+bx^2+cy^2$ 上，代入得：$4=a+b\cdot 1^2+c\cdot(-1)^2$

曲线 $\begin{cases} z=3-2x^2 \\ y=2 \end{cases}$ 在曲面 $z=a+bx^2+cy^2$ 上，代入得：$3-2x^2=a+bx^2+c\cdot 2^2$

解得：$a=7$，$b=-2$，$c=-1$，所以曲面方程为：$z=7-2x^2-y^2$，

该曲面为椭圆抛物面。

6. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & x+1 & x^2+1 \\ 1 & 2x+2 & 2x^2+4 \\ 1 & 3x+3 & 3x^2+9 \end{vmatrix}$。

解： $\begin{vmatrix} 1 & x+1 & x^2+1 \\ 1 & 2x+2 & 2x^2+4 \\ 1 & 3x+3 & 3x^2+9 \end{vmatrix}=(x+1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & x^2+1 \\ 1 & 2 & 2x^2+4 \\ 1 & 3 & 3x^2+9 \end{vmatrix}=(x+1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1^2 \\ 1 & 2 & 2^2 \\ 1 & 3 & 3^2 \end{vmatrix}=2(x+1)$

或 $\begin{vmatrix} 1 & x+1 & x^2+1 \\ 1 & 2x+2 & 2x^2+4 \\ 1 & 3x+3 & 3x^2+9 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & x+1 & x^2+1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 6 \end{vmatrix}=(x+1)\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}=2(x+1)$

二（**8 分**）求 Oxy 平面内曲线 $(x^2+y^2)^3=2xy^3$ 所围区域的面积 A。

解： 化 $(x^2+y^2)^3=2xy^3$ 为极坐标方程 $r^2=2cos\theta sin^3\theta$，利用对称性求得所围区域的面积 $A=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}r^2(\theta)\,d\theta=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}2cos\theta sin^3\theta d\theta=\frac{1}{2}$

三（**8分**）已知 $f(x)=\int_0^4|t-x|dt$，求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=3$ 处的切线方程 。

解： $f(x)=\int_0^4|t-x|dt=\begin{cases}\int_0^4(t-x)dt & x\le 0\\ \int_0^x(x-t)dt+\int_x^4(t-x)dt & 0<x\le 4\\ \int_0^4(x-t)dt & x>4\end{cases}$

$=\begin{cases}-4x+8 & x\le 0\\ x^2-4x+8 & 0<x\le 4\\ 4x-8 & x>4\end{cases}$，

得：$f(3)=5$ ，$f'(3)=2$，所以切线方程为：$y-5=2(x-3)$，即 $y=2x-1$。

四（**8分**）水平安置半径为 R 的半球形水池中盛满了水，水池球形底部中心有一个半径为 $\dfrac{R}{5}$ 的圆孔，按流速公式 $v=\sqrt{2gh}$（ h 为池中水深)，计算池中的水全部流完所需的时间 T 。

解： $\pi\left(R^2-x^2\right)dx=\pi\left(\dfrac{R}{5}\right)^2\sqrt{2g(R-x)}\,dt$

$$T=\int_0^R\frac{25\left(R^2-x^2\right)}{\sqrt{2g}\,R^2\sqrt{R-x}}dx=\frac{35}{3}\sqrt{\frac{2R}{g}}\ 。$$

五（**8分**）求过直线 $L:\begin{cases}2x-y-z+1=0\\ x+y-z-1=0\end{cases}$ 且与点 $M_0(1,-1,0)$ 距离最远的平面 Π 的一般方程 。

解： 方法一：

建立过直线 L 的平面束方程：$(2+\lambda)x+(-1+\lambda)y+(-1-\lambda)z+(1-\lambda)=0$，

代入点 M_0 的坐标 $(1,-1,0)$，得：$\lambda=4$，所以过直线 L 和点 M_0 的平面 Π_0 的方程是：$6x+3y-5z-3=0$，平面束中与平面 Π_0 垂直的平面 Π 的法向量须满足：$6(2+\lambda)+3(-1+\lambda)-5(-1-\lambda)=0$，得：$\lambda=-1$，所以平面 Π 的方

程是： $x-2y+2=0$，点 M_0 到此平面 Π 的距离最远。

方法二： 点 M_0 到平面束中平面的距离是：

$$D(\lambda)=\frac{|(2+\lambda)\times 1+(-1+\lambda)\times(-1)+(-1-\lambda)\times 0+(1-\lambda)|}{\sqrt{(2+\lambda)^2+(-1+\lambda)^2+(-1-\lambda)^2}}=\frac{|\lambda-4|}{\sqrt{3\lambda^2+4\lambda+6}}$$

$$\frac{dD^2(\lambda)}{d\lambda}=\frac{28(\lambda+1)(\lambda-4)}{\left(3\lambda^2+4\lambda+6\right)^2},$$

$\lambda=-1$ 时，$D(\lambda)$ 最大，$\lambda=4$ 时，$D(\lambda)$ 最小，

所以，取 $\lambda=-1$，得平面 Π 的方程为： $x-2y+2=0$，点 M_0 到此平面 Π 的距离最远。

六（**8 分**）证明：当 $|x|<1$ 时，$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geq 1+\frac{3}{2}x^2$。

解： 令 $f(x)=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{3}{2}x^2$，$|x|<1$

$$f'(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{2x}{1-x^2}-\sin x-3x$$

$$f''(x)=\frac{4}{\left(1-x^2\right)^2}-\cos x-3\geq 0$$，所以 $f'(x)$ 单调递增，

因为 $f'(0)=0$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得最小值，

又因为 $f(0)=0$，所以在 $|x|<1$ 时，$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geq 1+\frac{3}{2}x^2$。

七（**8 分**）已知矩阵 X 满足 $2X=AX+B$，且 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&1\\2&0&3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&3\\2&0\\1&1\end{pmatrix}$，求 X。

解： $(2I-A)X=B$， $X=(2I-A)^{-1}B$

$$2I-A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&0&-1\\-2&0&-1\end{pmatrix},\quad |2I-A|=-1,\quad (2I-A)^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\-1&1&-1\\0&-2&1\end{pmatrix},$$

得：$X=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

八（**8分**）设 p 为常数，讨论反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\left(1+x^2\right)\left(1+x^p\right)}dx$ 的敛散性，若收敛，求该反常积分的值 。

解： 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\frac{1}{\left(1+x^2\right)\left(1+x^p\right)}=0$ 或 $\frac{1}{\left(1+x^2\right)\left(1+x^p\right)}\le\frac{1}{1+x^2}$，

所以反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\left(1+x^2\right)\left(1+x^p\right)}dx$ 收敛 。

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{\left(1+x^2\right)\left(1+x^p\right)}dx=\int_0^{1}\frac{1}{\left(1+x^2\right)\left(1+x^p\right)}dx+\int_1^{+\infty}\frac{1}{\left(1+x^2\right)\left(1+x^p\right)}dx$$

$$=\int_0^{1}\frac{1}{\left(1+x^2\right)\left(1+x^p\right)}dx+\int_1^{0}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\left(1+\frac{1}{t^p}\right)}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt$$

$$=\int_0^{1}\frac{1}{\left(1+x^2\right)\left(1+x^p\right)}dx+\int_0^{1}\frac{t^p}{\left(1+t^2\right)\left(1+t^p\right)}dt=\int_0^{1}\frac{1}{1+x^2}dx=arctanx\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}$$ 。

九（**8分**）已知 $a_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}$，$n=1,2,\cdots$，讨论数列 $\{a_n\}$ 的敛散性 。

解： $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<0$，

所以数列 $\{a_n\}$ 单调递减，

$$a_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}$$

$$=2\left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}\right)-2\sqrt{n}$$

$$> 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)-2\sqrt{n}$$

$$= 2\left[\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right)+\cdots+\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\right]-2\sqrt{n}$$

$$= 2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{1}\right)-2\sqrt{n} = 2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)-2 > -2$$

所以数列 $\{a_n\}$ 有下界，

数列 $\{a_n\}$ 单调递减且有下界，所以收敛 。