复旦大学数学科学学院

2007～2008 学年第一学期期末考试试卷

☑ A 卷 ☐ B 卷

课程名称：高等数学 B(上) 课程代码：MATH120003.03

开课院系：数学科学学院 考试形式：闭卷

姓 名：________ 学 号：________ 专 业：________

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	总 分
得 分									
题 号	9	10	11	12	13	14	15	16	
得 分									

（以下为试卷正文）

注意：答题应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

1. 设函数 $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$，$g(x)=\dfrac{1}{x+1}$，问 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相等，为什么？（4 分）

不相等. 因为. $f(x)$ 的定义域为 $\{x \mid x\in R, x\neq 1 \text{且} x\neq -1\}$
而 $g(x)$ 的定义域为 $\{x \mid x\in R, x\neq -1\}$. 定义域不同

2. 设数列 $\{x_n\}$ 是一个无穷小量，$\forall n$，$x_n>0$，问 $\{\sqrt[n]{x_n}\}$ 是否是无穷小量？如果是请证明，否则请举出反例。（4 分）

$\sqrt[n]{x_n}$ 不一定是无穷小量, 例如 ① $x_n=\frac{1}{n}$, 是无穷小量
而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=1$, 不是无穷小量.
② $x_n=(\frac{1}{n})^n$ 是无穷小量. $\sqrt[n]{x_n}=\frac{1}{n}$ 也是无穷小量.

3. 以下计算是否正确？为什么？$\int_{-1}^{1}\dfrac{d}{dx}\left(\arctan\dfrac{1}{x}\right)dx=\arctan\dfrac{1}{x}\Big|_{-1}^{1}=\arctan 1-\arctan(-1)$ $=\dfrac{\pi}{2}$。（4 分）

不正确, 运用 Newton - Leibniz 公式时要求被积函数和原函数都是积分区间内的连续函数, 而 $\arctan\frac{1}{x}$ 在 $(-1, 1)$ 内不连续.

4. **A** 和 **B** 两个 n 阶方阵，若 **AB=0**，是否可以推出 **A=0** 或 **B=0**？如果是请证明，不是请举出反例。（4 分）

不可以. 设 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$

$A\cdot B=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=0$. 而 $A\neq 0$, $B\neq 0$.

5. 设函数 f 在 $x=x_0$ 处连续，且 $f(x_0)>0$，用函数连续的定义证明：$\exists\delta>0$ 在，当 $x\in O(x_0,\delta)$ 时 $f(x)>0$。（6 分）

f 在 x_0 处连续, 取 $\varepsilon=\frac{f(x_0)}{2}$, $\exists\,\delta>0$. 当 $x\in O(x_0,\delta)$ 时.
$|f(x)-f(x_0)|<\frac{f(x_0)}{2}$. 即. $-\frac{f(x_0)}{2}<f(x)-f(x_0)<\frac{f(x_0)}{2}$
$\therefore\ f(x)>\frac{f(x_0)}{2}>0$.

6. 确定常数 a,b 使函数 $f(x)=\begin{cases} ax+b, & x>1 \\ x^2, & x\le 1 \end{cases}$ 有连续的导数。（6 分）。

① 首先 f 在 x=1 处连续.

$f(1)=1$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(ax+b) = a+b = 1$

② f 在 x=1 处可导数.

$f_+(1) = \lim\limits_{\Delta x\to 0^+} \dfrac{a(1+\Delta x)+b-1}{\Delta x} = a$. $f_+(1)=f_-(1)$

$f_-(1) = \lim\limits_{\Delta x\to 0^+} \dfrac{(1+\Delta x)^2-1}{\Delta x} = 2$.

$\therefore a=2$.

$b=-1$.

$x>1$ 时

$f'(x)=2$.

$x\le 1$ 时.

$f'(x)=2x$.

$\lim\limits_{x\to 1} f'(x) = 2 = f'(1)$

$\therefore$ 连续.

7. 求函数 $f(x)=\ln(1+x)$ 的 n 阶导数。（6 分）

$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$

$f''(x)=-\dfrac{1}{(1+x)^2}$

$f'''(x)=2\cdot\dfrac{1}{(1+x)^3}$

$f^{(4)}(x)=-3\cdot 2\,\dfrac{1}{(1+x)^4}$

$f^{(n-1)}(x)=(-1)^{n-2}(n-2)!\,(1+x)^{-(n-1)}$.

$\therefore f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}(n-1)!\,(1+x)^{-n}$.

8. 求函数 $\int_x^{\sin x}\sqrt{1+t^2}\,dt$ 的导数。（6 分）

$\left(\int_x^{\sin x}\sqrt{1+t^2}\,dt\right)' = \left(\int_x^a\sqrt{1+t^2}\,dt + \int_a^{\sin x}\sqrt{1+t^2}\,dt\right)'$

$= \left(-\int_a^x\sqrt{1+t^2}\,dt + \int_a^{\sin x}\sqrt{1+t^2}\,dt\right)'$

$= \sqrt{1+\sin^2 x}\cdot\cos x - \sqrt{1+x^2}$

9. 求过点 $(-1,2,1)$ 和直线 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z+2}{-1}$ 的平面的一般方程。（4 分）

$P_0=(-1,2,1)$. $\vec{v}_1=\overrightarrow{P_0P_1}=(2,-4,-3)$

$P_1=(1,-2,-2)$. $\vec{l}=(2,3,-1)$

$\vec{n}=\vec{v}_1\times\vec{l}=\left(\begin{vmatrix}-4 & -3\\ 3 & -1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}-3 & 2\\ -1 & 2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}2 & -4\\ 2 & 3\end{vmatrix}\right)$

$=(13,-4,14)$

平面方程 $((x+1),(y-2),(z-1))\cdot(13,-4,14)=0$.

$\therefore 13x-4y+14z+7=0$

10. 设 $\mathbf{A}$ 是 3 阶方阵，$\mathbf{A}^*$ 是其伴随矩阵，若 $|\mathbf{A}|=\frac{1}{24}$，求 $\left|\left(\frac{1}{2}\mathbf{A}\right)^{-1}-120\mathbf{A}^*\right|$。（6 分）

$(\frac{1}{2}A)^{-1}=2A^{-1}$ $(\because (\frac{1}{2}A)\cdot 2A^{-1}=A\cdot A^{-1}=I.$

$\cancel{A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=24A^*}$ $A^*=|A|\cdot A^{-1}=\frac{1}{24}A^{-1}$

$|(\frac{1}{2}A)^{-1}-120A^*|=|2A^{-1}-5A^{-1}|=|-3A^{-1}|=-27\cdot 24$

$=-648$

11. 求下列极限。（8 分）

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$（4 分）

原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}(x-x^2(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}+o(\frac{1}{x^2})).$

$=\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1}{2}+o(1))=\frac{1}{2}$

2) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x^2)\tan\frac{\pi}{2}x$ （4 分）

原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x}{\cos\frac{\pi}{2}x}\cdot\frac{(1+x)\sin\frac{\pi}{2}x}{1}.$

$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x}{\cos\frac{\pi}{2}x}\cdot\lim\limits_{x\to 1}((1+x)\sin\frac{\pi}{2}x)$

$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{-1}{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x}\cdot 2=\frac{4}{\pi}$

12. 求下列积分（12 分）

1) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$ （4 分） 令 $t=\sqrt{x}$, $x=t^2$ $dx=2tdt$.

原式 $=\int\frac{2tdt}{t(1+t^2)}=2\int\frac{dt}{1+t^2}=2\arctan t+C$

$=2\arctan\sqrt{x}+C.$

2) $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx$ （4 分）

$$= \int_1^e \frac{dx}{x} + \int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$$

$$= \ln x\Big|_1^e + \int_1^e \ln x\, d\ln x$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(\ln x)^2\Big|_1^e = \frac{3}{2}$$

3) $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2}dx$ （4 分）

$$= -\int_1^{+\infty} \arctan x\, d\frac{1}{x} = -\frac{\arctan x}{x}\Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{\pi}{4} + \int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right)dx = \frac{\pi}{4} + \ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\Big|_1^{+\infty}$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$$

13. 设 $f(x)=\begin{cases} xe^{-x^2}, & x\ge 0 \\ \frac{1}{1+e^x}, & x<0 \end{cases}$，计算 $I=\int_1^4 f(x-2)dx$。（6 分）

$$I = \int_1^4 f(x-2)dx \xlongequal[x=t+2]{t=x-2} \int_{-1}^2 f(t)dt = \int_{-1}^0 \frac{dx}{1+e^x} + \int_0^2 xe^{-x^2}dx.$$

$$I_1 = \int_{-1}^0 \frac{dx}{1+e^x} \xlongequal[dx=\frac{dt}{t}]{t=e^x} \int_{e^{-1}}^1 \frac{1}{1+t}\cdot\frac{1}{t}dt = \int_{e^{-1}}^1 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}\right)dt = \ln\frac{1+e}{2}$$

$$I_2 = \int_0^2 xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^2 e^{-x^2}dx^2 = \frac{1-e^{-4}}{2}$$

$$\therefore I = \ln\frac{1+e}{2} + \frac{1-e^{-4}}{2}$$

14. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，证明：$F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增。（8 分）

证：设 $x_1 > x_2 > 0$ 考察 $F(x_1)-F(x_2)$ 的符号.

$$F(x_1)-F(x_2) = \frac{\int_0^{x_1} f(t)dt}{x_1} - \frac{\int_0^{x_2} f(t)dt}{x_2} = \frac{x_2\int_0^{x_1} f(t)dt - x_1\int_0^{x_2} f(t)dt}{x_1x_2}$$

$$= \frac{x_2\int_0^{x_2} f(t)dt + x_2\int_{x_2}^{x_1} f(t)dt - x_1\int_0^{x_2} f(t)dt}{x_1x_2} = \frac{x_2\int_{x_2}^{x_1} f(t)dt - (x_1-x_2)\int_0^{x_2} f(t)dt}{x_1x_2}$$

$\because f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单增 $\therefore \int_{x_2}^{x_1} f(t)dt \ge f(x_2)(x_1-x_2)$, $\int_0^{x_2} f(t)dt \le x_2 f(x_2)$

$$\therefore F(x_1)-F(x_2) \ge \frac{x_2(x_1-x_2)f(x_2) - (x_1-x_2)f(x_2)\cdot x_2}{x_1x_2} = 0$$

由于 $x_1 > x_2 > 0$ 是任意取的，$\therefore F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增加.

注：由于 $f(x)$ 不一定连续. $\therefore \int_0^x f(t)dt$ 不一定可导. 所以用导数的

15. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可微，并且 $ab>0$，证明：

$\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix} = f(\xi)-\xi f'(\xi)$，其中 $a<\xi<b$（8 分）

$$\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a, & b \\ f(a), & f(b) \end{vmatrix} = \frac{af(b)-bf(a)}{a-b} \overset{(ab>0)}{=} \frac{\frac{f(b)}{b}-\frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}$$

令 $g(x)=\frac{1}{x}$，$\because ab>0$ $\therefore g(x)$ 和 $\hat{f}(x)$ 在 $[a,b]$ 连续 (a,b) 可微.

$\hat{f}(x)=\frac{f(x)}{x}$ $\therefore$ 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a, & b \\ f(a), & f(b) \end{vmatrix} = \frac{\frac{f(b)}{b}-\frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}} = \frac{\hat{f}'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{\frac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}}$$

$$= f(\xi)-\xi f'(\xi).$$

16. 在经济学中，称函数 $Q(x)=A\left(\delta K^{-x}+(1-\delta)L^{-x}\right)^{-\frac{1}{x}}$ 为固定替代弹性生产函数，而称

$\overline{Q}=AK^{\delta}L^{1-\delta}$ 为 Cobb-Douglas 生产函数，简称 C-D 生产函数；试证明：当 $x\to 0$ 时，

固定替代弹性生产函数变为 C-D 生产函数，即 $\lim\limits_{x\to 0}Q(x)=\overline{Q}$。（8 分）

$$\lim_{x\to 0}Q(x) = \lim_{x\to 0}A\left(\delta K^{-x}+(1-\delta)L^{-x}\right)^{-\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0}A\cdot L\left(\delta\cdot\left(\frac{K}{L}\right)^{-x}+1-\delta\right)^{-\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0}A\cdot L\left(1+\left(\left(\frac{K}{L}\right)^{-x}-1\right)\delta\right)^{\frac{1}{\left(\left(\frac{K}{L}\right)^{-x}-1\right)\cdot\delta}\cdot\frac{\left(\left(\frac{K}{L}\right)^{-x}-1\right)\delta}{-x}}$$

当 $x\to 0$ 时 $\left(\left(\frac{K}{L}\right)^{-x}-1\right)\to 0$

$$= AL\lim_{x\to 0}\left(\left(1+\left(\left(\frac{K}{L}\right)^{-x}-1\right)\delta\right)^{\frac{1}{\left(\left(\frac{K}{L}\right)^{-x}-1\right)\delta}}\right)^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(1-\left(\frac{K}{L}\right)^{-x}\right)\delta}{x}}$$

$$= AL\cdot e^{\left(\ln\frac{K}{L}\right)\cdot\delta}$$

$$= AL\cdot\frac{K^{\delta}}{L^{\delta}} = AK^{\delta}L^{(1-\delta)}.$$

$$= \overline{Q}$$

#.