（装订线内不要答题）

复旦大学数学科学学院

2012～2013学年第二学期期末考试试卷

■ A 卷

课程名称：高等数学B(下)　　课程代码：MATH120004

开课院系：数学科学学院　　考试形式：闭卷

姓　名：________　　学　号：________　　专　业：________

题　目	1	2	3	4	5	6	7	总分
得　分								

1.（本题满分42 分，每小题7 分）计算下列各题：

(1)设$z(x,y)=\left(\frac{x}{y}\right)^2\ln(3x-2y)$，求$\frac{\partial z}{\partial x}(1,1)$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(1,1)$.

(2)求空间曲线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-3x=0 \\ 2x-3y+5z-4=0 \end{cases}$ 在点$(1,1,1)$处的切线方程。

(3)求椭圆抛物面$z=1+x^2+3y^2$、圆柱面$x^2+y^2=1$及平面$z=0$所围的有界区域的体积。

(4)计算二重积分$\iint\limits_{\Omega}\dfrac{(1+x+y)^2}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中区域$\Omega=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$.

（装订线内不要答题）

(5)求和$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}$.

(6)一个雪球开始融化，假设它将时刻保持球形，且体积的融化率与表面积成正比，若在最初的一个小时内，其体积缩减为原来的$\frac{1}{8}$。计算雪球全部融化所需的时间。

2.（本题满分8 分） 求函数$f(x,y)=x^2+y^2-xy$在区域D：$|x|+|y|\leq 1$上的最大值。

3.（本题满分8 分） 设$f(x)$在$\mathbb{R}$上二阶可导，讨论$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n f(\frac{1}{n})$的敛散性。

4.（本题满分10 分） 设$f(x)$在$[1,+\infty)$上二阶连续可导，$f(1)=0$, $f'(1)=1$, 函数$z=(x^2+y^2)f(x^2+y^2)$满足方程$z_{xx}+z_{yy}=0$. 求函数$f(x)$。

（装订线内不要答题）

5.（本题满分10 分） 求函数$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n2^n}x^n$ 在$x=1$处的Taylor展开式及所求展开式的收敛域。

（装订线内不要答题）

6.（本题满分10 分） 证明不等式：

$$\frac{\pi}{4}(1-e^{-1}) < \Big(\int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x\Big)^2 < \frac{\pi}{4}(1-e^{-2})$$

7.（本题满分12 分） 设$f(x)$是以2π为周期的函数且$f(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,\pi];\\ 0, & x\in(-\pi,0).\end{cases}$

(1)求$f(x)$的Fourier展开式，并分别计算和函数在$\dfrac{7\pi}{2}$及7π处的值；

(2)求实系数$A_0, A_1, \ldots, A_{10}$和$B_1, B_2, \ldots, B_{10}$使下面的积分：

$$\int_{-\pi}^{\pi}\Big[\big(f(x)-g(x)\big)^2+g^2(x)\Big]\mathrm{d}x$$

达到最小值，其中函数$g(x)=\dfrac{A_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{10}\big(A_n\cos nx+B_n\sin nx\big)$.