

复旦大学数学科学学院

2012 ~2013 学年第 一 学期期末考试试卷

A 卷

课程名称: 高等数学 (B 上) 课程代码: MATH120003.04

开课院系: 数学科学学院 考试形式: 闭卷

姓 名: _____ 学 号: _____ 专 业: _____

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	总分
得分											

一. (15 分, 每小题 5 分) 求下面的极限:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n-2} \right)^n$;

2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{\sqrt{x}} \ln(1+t^4) dt}{x^{\frac{5}{2}}}$;

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x - \sin x + \ln(1+x)}{x \sin^2 x}.$

二. (15分, 每小题5分) 计算下面各题:

1. 设 $f(x) = x^2 \cos 2x$, 求高阶导数 $f^{(10)}(x)$;

2. 计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + 2 \cos x}{3 \sin x + \cos x} dx$;

3. 设 $t \in (0, 1)$, 计算积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\tan x)^{1-2t} dx$.

三. (10分) 判断广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^4)}{x^p} dx$ 的收敛性, 其中 p 是一个实参数。

四. (10分) 设 Γ 是空间曲线: $y = e^{\frac{x^2}{2}}, z = 0, x \geq 0$, 将该曲线绕坐标 y 轴旋转一周,
1) 求所成曲面上的点满足的方程; 2) 求所成曲面与平面 $y = e$ 围成的有界立体的体积。

五. (10分) 设 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 证明: $\frac{x}{\sin x} < \frac{\tan x}{x}$ 。

六. (8分) 已知直线 l 经过点 $(11, 9, 0)$, 且与直线 $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-5}{3}$ 和直线 $\frac{x}{5} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$ 相交, 求直线 l 的方程。

七. (8 分) 设平面 π 过直线 $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{-1}$, 且平行于直线 $\frac{x}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$, 求平面 π 的方程。

八. (8 分) 已知线性方程组
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + ky + 3z = 0 \\ 3x + 5y + kz = 1 \end{cases}$$
 有唯一解, 请决定参数 k 的取值范围, 并求出方程组相应的唯一解。

九. (10 分) 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有非负的二阶导函数, 在 $x=0$ 处连续, 并且 $f(0)=0$, 证明: 对于任意的 $x_1 > 0, x_2 > 0$, 都有 $f(x_1 + x_2) \geq f(x_1) + f(x_2)$ 。

十. (6 分) 设 $a < b, f(x)$ 是闭区间 $[a, b]$ 上的非负连续函数, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\int_a^b (f(x))^n dx \right]^{1/n} = \max_{a \leq x \leq b} f(x)。$$