复旦大学自然科学试验班、经济管理试验班
2011 ～2012 学年第 一 学期期末考试试卷（A 卷）

课程名称：____高等数学（B）__　　课程代码：___MATH120003___

开课院系：____数学科学学院______　　考试形式：　　　闭卷

姓　名：________________　学　号：________________　专　业：________________

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	总 分
得 分									

一．选择题（15 分）

1．设函数 $g(x)$ 在 $x=0$ 点某邻域内有定义，若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-g(x)}{\sin x}=1$ 成立，则[ ]。

A． $g(x)$ 在 $x=0$ 点连续，但不可导

B． $g(x)$ 在 $x=0$ 点可导但导数不为 0

C． $\lim\limits_{x\to0}g(x)$ 存在，但 $g(x)$ 在 $x=0$ 点不连续

D． $x\to0$ 时，$g(x)$ 是 x 的高阶无穷小量

解：由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-g(x)}{\sin x}=1$，知 $\lim\limits_{x\to0}(x-g(x))=0$，$\lim\limits_{x\to0}g(x)=\lim\limits_{x\to0}x=0$。

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)-x+x}{\sin x}\times\dfrac{\sin x}{x}=-1+1=0$。选 D。

2.已知 $f(x)=3x^2+kx^{-3}(k>0)$，当 $x>0$ 时，总有 $f(x)\ge20$ 成立，则参数 k 的最小取值是[ ]。

A． 32　　B． 64　　C． 72　　D． 96

解：　$f(x)=3x^2+kx^{-3}\ge20\Rightarrow 3x^5-20x^3+k\ge0$

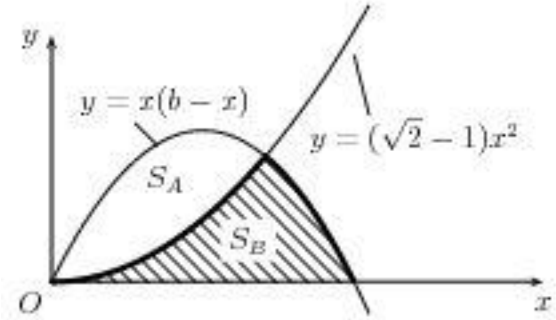
显然由题设 $k>0$，要满足上述不等式恒成立（$x>0$），需要求出

$g(x)=3x^5-20x^3$ 的最小值（负值）。令

$g'(x)=15x^4-60x^2=0\Rightarrow x=\pm2$，但 $x>0$ 只能 $x=2$。

此时 $g(2)=3\times 2^5-20\times 2^3=-64$，故 $k=64$。

3.如题图，抛物线 $y=(\sqrt{2}-1)x^2$ 把 $y=x(b-x)(b>0)$ 与 x 轴所构成的区域面积分为 S_A 与 S_B 两部分，则[ ]。



A. $S_A<S_B$　　B. $S_A=S_B$　　C. $S_A>S_B$

D. S_A 与 S_B 大小关系与 b 的数值有关

解：两条曲线的交点满足

$$(\sqrt{2}-1)x^2=x(b-x)\Rightarrow x(b-(\sqrt{2}-1)x-x)=x(b-\sqrt{2}x)=0,$$

得两个交点坐标为 $(0,0)$ 和 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}b,\frac{\sqrt{2}-1}{2}b^2\right)$，这里 $\frac{\sqrt{2}}{2}b<b$。

$$S_A=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}b}\left(x(b-x)-(\sqrt{2}-1)x^2\right)dx=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}b}\left(bx-\sqrt{2}x^2\right)dx=\frac{b^2}{12},$$

$$S_A+S_B=\int_0^b x(b-x)dx=\frac{b^2}{6}\Rightarrow S_B=S_A+S_B-S_A=\frac{b^2}{12}$$ 。选 B。

二．填空题(15 分)

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{5^n+3}{n}}=$ _ 。

解：$\frac{5}{\sqrt[n]{n}}=\sqrt[n]{\frac{5^n}{n}}<\sqrt[n]{\frac{5^n+3}{n}}<\sqrt[n]{\frac{5^n+5^n}{n}}=5\frac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{n}}$，而

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{5^n+3}{n}}=5$。

2. 设$\begin{cases} x=\int_1^t \sqrt{\ln u}\,du, \\ y=\int_1^{t^2} \sqrt{\ln u}\,du, \end{cases}$ $(t>1)$，求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

解：本题为由参数方程确定的函数求导法。

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\left(\int_1^{t^2}\sqrt{\ln u}\,du\right)'}{\left(\int_1^{t}\sqrt{\ln u}\,du\right)'}=\frac{2t\sqrt{2\ln t}}{\sqrt{\ln t}}=2\sqrt{2}t\text{，}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\left(2\sqrt{2}t\right)'}{\left(\int_1^{t}\sqrt{\ln u}\,du\right)'}\ \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\ln t}}\text{。}$$

3.设一平面经过原点及$M(6,-3,2)$,且与平面$4x-y+2z=8$垂直，则此平面方程为_ 。

解: 所求平面的法向既与$\overrightarrow{OM}=(6,-3,2)$垂直，亦与平面$4x-y+2z=8$垂直，故

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 6 & -3 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}=0\Rightarrow 2x+2y-3z=0\text{。}$$

三．计算题（**20** 分）

1. 设函数$y=y(x)$由方程$x^y=y^x$确定，求$y'(1)$。

解： $x^y=y^x\Rightarrow e^{y\ln x}=e^{x\ln y}$，两边求导，

$$e^{y\ln x}(y'\ln x+\frac{y}{x})=e^{x\ln y}(\ln y+\frac{x}{y}y')\Rightarrow y'=\frac{xy\ln y-y^2}{xy\ln x-x^2}\text{，}\quad y(1)=1\text{，}\quad y'(1)=1\text{。}$$

2.求$\int\left(2^x+3^x\right)^2dx$。

解： $\int\left(2^x+3^x\right)^2dx=\int\left(2^{2x}+2\times 6^x+3^{2x}\right)dx=\dfrac{1}{2\ln 2}2^{2x}+\dfrac{2}{\ln 6}6^x+\dfrac{1}{2\ln 3}3^{2x}+C$。

3.利用*Taylor*展开式求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}\ln\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right)\right)$。

解：$\ln\dfrac{2+x}{2-x}=\ln\dfrac{1+\frac{x}{2}}{1-\frac{x}{2}}=\ln\left(1+\dfrac{x}{2}\right)-\ln\left(1-\dfrac{x}{2}\right)$

$=\left[\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{2}\right)^2+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{x}{2}\right)^3+o(x^2)\right]-\left[-\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{2}\right)^2-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{x}{2}\right)^3+o(x^2)\right]=x+\dfrac{x^3}{12}+o(x^3)$，

$\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}\ln\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right)\right)=\lim\limits_{x\to0}\left[1+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}\left(x+\dfrac{x^3}{12}+o(x^3)\right)\right]$

$=\lim\limits_{x\to0}\left(1-\dfrac{1}{12}-\dfrac{o(x^3)}{x^3}\right)=\dfrac{11}{12}$。

4. 求由抛物线$(y-2)^2=x-1$和与抛物线相切于纵坐标$y_0=3$处的切线以及x轴所围成的图形面积。

解：$y_0=3$，$x_0=2$；$2(y-2)y'=1\Rightarrow y'=\dfrac{1}{2(y-2)}\Rightarrow y'\Big|_{y_0=3}=\dfrac{1}{2}$。

$y_0=3$处的切线方程为 $y-3=\dfrac{1}{2}(x-2)$或$x=2y-4$，所围成的图形面积

$S=\int_0^3\left[(y-2)^2+1-(2y-4)\right]dy=9$。

四．试就p的不同取值,判断反常积分$\int_0^{+\infty}\dfrac{\ln(1+\sqrt{x})}{x^p}dx$的敛散性。（8 分）

解：$\int_0^{+\infty}\dfrac{\ln(1+\sqrt{x})}{x^p}dx=\int_0^1\dfrac{\ln(1+\sqrt{x})}{x^p}dx+\int_1^{+\infty}\dfrac{\ln(1+\sqrt{x})}{x^p}dx$。

因为$\lim\limits_{x\to0+}x^{p-\frac{1}{2}}\dfrac{\ln(1+\sqrt{x})}{x^p}=1$，所以$\int_0^1\dfrac{\ln(1+\sqrt{x})}{x^p}dx$当$p<\dfrac{3}{2}$时收敛，当$p\ge\dfrac{3}{2}$时发散；

当$p>1$时，$\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{p+1}{2}}\left|\dfrac{\ln(1+\sqrt{x})}{x^p}\right|=0$，所以$\int_1^{+\infty}\dfrac{\ln(1+\sqrt{x})}{x^p}dx$收敛。当$p\le1$时，因为当$x\ge1$时有$\dfrac{\ln(1+\sqrt{x})}{x^p}>\dfrac{\ln2}{x^p}$，且$\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^p}dx$发散，所以$\int_1^{+\infty}\dfrac{\ln(1+\sqrt{x})}{x^p}dx$发散。

因此当$1<p<\frac{3}{2}$时，$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx$收敛。

五．判断方程$e^{-\frac{x}{2}}=|x-1|$在区间$[-2,2]$中共有几个实根，并简要证明你的结论。（**8** 分）

证明：$f(x)=e^{-\frac{x}{2}}-|x-1|=\begin{cases}e^{-\frac{x}{2}}+x-1, & x\in[-2,1]\\ e^{-\frac{x}{2}}-x+1, & x\in(1,2]\end{cases}$，

$f(-2)=e-3<0, f(1)=e^{-\frac{1}{2}}>0, f(2)=e^{-1}-1<0$，用闭区间上连续函数的零点存在定理，$f(x)$在$[-2,1]$与$(1,2]$中至少各有一根。

又 $f'(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}+1, & x\in[-2,1]\\ -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}-1, & x\in(1,2]\end{cases}$，

其中$f'(x)<0, x\in(1,2]$，此时$f(x)$单调下降，只有一根；

当$x\in[-2,1]$时，若令$f'(x)=0\Rightarrow e^{-\frac{x}{2}}=2=e^{\ln 2}\Rightarrow x=-2\ln 2\in[-2,1]$，且$f'(x)=0$仅此一根。当$x\in[-2,-2\ln 2]$，$f(-2\ln 2)=1-2\ln 2<0$，$f'(x)<0$，此时$f(x)$单调下降，联立$f(-2)=e-3<0$，知$f(x)$在$x\in[-2,-2\ln 2]$时无根；$x\in[-2\ln 2,1]$，$f'(x)>0$，也只有一根。

总结，$f(x)$在$[-2,1]$与$(1,2]$中各仅有一根。

六．设D是位于曲线$y=\sqrt{x}a^{-\frac{x}{2a}}(a>1, 0\le x<+\infty)$下方，$x$轴上方的无界区域。（**1**）求区域$D$绕$x$轴旋转一周所成旋转体的体积$V(a)$；

（**2**）当a为何值时，$V(a)$最小？并求此最小值。（**8** 分）

解：（**1**）$V(a)=\pi\int_0^{+\infty}y^2(x)dx=\pi\int_0^{+\infty}xa^{-\frac{x}{a}}dx=-\frac{\pi a}{\ln a}\int_0^{+\infty}xd\left(a^{-\frac{x}{a}}\right)$

$$=\frac{\pi a}{\ln a}\int_0^{+\infty}a^{-\frac{x}{a}}dx=-\frac{\pi a^2}{\ln^2 a}a^{-\frac{x}{a}}\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{\pi a^2}{\ln^2 a}；$$

（2）$V'(a)=\pi\frac{2a\ln^2 a-2a\ln a}{\ln^4 a}=2\pi a\frac{\ln a-1}{\ln^3 a}=\begin{cases}<0,1<a<e,\\=0,\quad a=e,\\>0.\quad a>e.\end{cases}$

所以$a=e$时，$V(a)$取最小值$V(e)=\pi e^2$。

七．求直线$l:\begin{cases}x=2t,\\y=k,k\neq 0\\z=t.\end{cases}$绕$z$轴旋转一周生成的旋转曲面方程, 并指出所得旋转曲面的类型。（8 分）

解：在平面$y=k$上，所给直线为$x=2z$，

取l上任一点$P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$，其到z轴的距离为$\sqrt{x_0^2+y_0^2}$，绕z轴旋转至$P(x,\ y,\ z)$，注意$z=z_0$，则其到z轴的距离为$\sqrt{x^2+y^2}$，满足

$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x_0^2+y_0^2}$，但$P_0$ 在l上，$(x_0,\ y_0,\ z_0)=(2z_0,\ k,\ z_0)$

故 $\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(2z)^2+k^2}$，整理得 $\frac{x^2}{k^2}+\frac{y^2}{k^2}-\frac{z^2}{\frac{k^2}{4}}=1$，此为单叶双曲面。

八．已知函数$y=\frac{x^3}{(x-1)^2}$，求（1）函数的增减区间及极值；

（2）函数的凸凹区间及拐点；（3）函数图形的渐近线。（9 分）

解：$y'=\frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$，$y''=\frac{6x}{(x-1)^4}$。$x=1$为间断点，$x=0$，$x=3$为驻点。

	$x<0$	0	$0<x<1$	1	$1<x<3$	3	$x>3$
x	$-$		$+$		$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$		$-$		$+$

y'	$+$		$+$	无	$-$		$+$
y''	$-$		$+$	定	$+$		$+$
y	增（凸）	拐点 $(0,0)$	增（凹）	义	减（凹）	极小 $\frac{27}{4}$	增（凹）

$\lim\limits_{x\to 1} y=\infty$， $x=1$ 为垂直渐近线； $\lim\limits_{x\to\infty}(y-x)=2$， $y=x+2$ 是斜渐近线。

九．设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在二阶导数，且 $g''(x)\neq 0$，$f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$，证明：

（1）在开区间 (a,b) 内， $g(x)\neq 0$；

（2）在在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$。（9 分）

证明：(1)若 $\exists c\in(a,b)$，使得 $g(c)=0$，则在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上各用一次罗尔定理，得到 $\xi_1\in(a,c)$， $\xi_2\in(c,b)$，满足 $g'(\xi_1)=g'(\xi_2)=0$；再次在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上用罗尔定理，知存在一点 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$，使 $g''(\xi)=0$，与题设矛盾。

（2）构造函数 $\varphi(x)=f(x)g'(x)-f'(x)g(x)$，则有 $\varphi(a)=\varphi(b)=0$，由罗尔定理，知存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $\varphi'(\xi)=0$，此即

$$\varphi'(\xi)=(f(x)g'(x)-f'(x)g(x))'\Big|_{x=\xi}=f(\xi)g''(\xi)-f''(\xi)g(\xi)=0\Rightarrow\frac{f(\xi)}{g(\xi)}=\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}。$$