复旦大学

2011 ～2012 学年第二学期期末考试试卷（A 卷答案）

课程名称：高等数学（B）　　课程代码：MATH120004.03

开课院系：数学科学学院　　考试形式：闭卷

姓　名：________　学　号：________　专　业：________

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	总 分
得 分											

一.（**10** 分）求球面 $x^2+y^2+2z^2=7$ 和平面 $x+y+z=0$ 的交线在点 $(-2,1,1)$ 处的切线方程。

解：$\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{5}=\dfrac{z-1}{-6}$。

二.（**10** 分）求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}$ 的和。

解：令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}$，则 $S\left(\dfrac{1}{\sqrt3}\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}$。由于

$(xS(x))'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\dfrac{1}{1+x^2}-1$，所以 $xS(x)=\arctan x-x, S\left(\dfrac{1}{\sqrt3}\right)=\dfrac{\sqrt3\pi}{6}-1$。

三.（**10** 分）求 $f(x,y,z)=x^4+y^4+z^4$ 在曲面 $xyz=1$ 上的极值，并说明是极大值还是极小值。

解：令 $L=x^4+y^4+z^4+\lambda(xyz-1)$，则 $4x^3+\lambda yz=4y^3+\lambda xz=4z^3+\lambda xy=0, xyz=1$，

解之得四个解 $(1,1,1),(1,-1,-1),(-1,1,-1),(-1,-1,1)$，以及 $\lambda=-4$。可得极值为 **3**。由对称性，只需验证点 $(1,1,1)$ 是函数 $L=x^4+y^4+z^4-4(xyz-1)$ 的极小值点即可。计算知，

$\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2}(1,1,1)=\dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2}(1,1,1)=\dfrac{\partial^2 L}{\partial z^2}(1,1,1)=12$, 且 $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}(1,1,1)=\dfrac{\partial^2 L}{\partial y\partial z}(1,1,1)=\dfrac{\partial^2 L}{\partial z\partial x}(1,1,1)=-4$, 所以这个函数在 $(1,1,1)$ 处的 **Hessian** 矩阵是正定的。

四.（**10** 分）计算二重积分 $\iint\limits_{D}\left(y+x^2\right)dxdy$，这里 $D: x^2+\frac{1}{2}(y-x)^2 \le \sqrt{2}$。

解：$\frac{1}{\sqrt{2}}\pi$。

五．**(10** 分**)** 求微分方程 $3y^3\left(1+x^2\right)\frac{dy}{dx}-xy^4+2xy\sqrt{1+x^2}\cos(2x)=0$ 的一个通解。

解：$y=0$ 是显然的解。设 $y\neq 0$，令 $u=y^3$，原方程化为下面的一阶线性方程

$$\left(1+x^2\right)\frac{du}{dx}-xu+2x\cos 2x\sqrt{1+x^2}=0。$$

其通解为 $u=\left(C-x\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\sqrt{1+x^2}$，其中 C 是一个任意常数。原方程的通解为 $y^3=\left(C-x\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\sqrt{1+x^2}$。

六.（**10** 分）判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\ln n}{n}\right)^n$ 的收敛性，并给出详细理由。

解：当 $n\to+\infty$ 时，

$$\ln\left(\frac{\left(1-\frac{\ln n}{n}\right)^n}{\frac{1}{n}}\right)=n\ln\left(1-\frac{\ln n}{n}\right)+\ln n=n\left(-\frac{\ln n}{n}-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2+o\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2\right)+\ln n\to 0,$$

所以 $\left(\frac{\left(1-\frac{\ln n}{n}\right)^n}{\frac{1}{n}}\right)\to 1$，因此，由正项级数的比较判别法，题中级数发散。

七.（**10** 分）将 $f(x)=x^2$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上展开成 **Fourier** 级数，并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ 的和。

解：$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$，$x\in[-\pi,\pi]$，

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{1}{90}\pi^4$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-\frac{1}{12}\pi^2$。

八.（**10** 分）计算三重积分 $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$，这里 $V: x^2+y^2+z^2\le z$。

解：利用球坐标，值为$\frac{1}{10}\pi$。

九.（**10** 分）设函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某个邻域内有连续的偏导数$\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$，证明：

$f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处一定可微。

解：略。

十.（**10** 分）设a,b是实数，试给出二阶常微分方程$y''+ay'+by=0$的每个解当$x\to+\infty$时都趋向于零的必要充分条件，并证明之。

解：特征方程为$\lambda^2+a\lambda+b=0$，特征根为$-\frac{a}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{a^2-4b}$。**1**）$a^2-4b>0$，则方程的全部解为$y=C_1e^{\left(-\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{a^2-4b}\right)x}+C_2e^{\left(-\frac{a}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{a^2-4b}\right)x}$，当$x\to+\infty$时，若$C_1\ne 0$显然有界趋向于无穷。**2**）$a^2-4b=0$，则方程的全部解为$y=C_1e^{-\frac{a}{2}x}+C_2xe^{-\frac{a}{2}x}$，仅当$a>0$时，每个解当$x\to+\infty$时都趋向于零。**3**）$a^2-4b<0$，则方程的全部解为

$y=C_1e^{-\frac{a}{2}x}\cos\frac{1}{2}\sqrt{4b-a^2}x+C_2e^{-\frac{a}{2}x}\sin\frac{1}{2}\sqrt{4b-a^2}x$，仅当$a>0$时，每个解当$x\to+\infty$时都趋向于零。综上得到所求的必要充分条件为：$a^2-4b\le 0$，且$a>0$。