2017～2018 学年第二学期期末 A 卷

参考答案

一. 计算和简答题（7分×7=49分）　　（答题时请写明过程!）

1．　设$z^2-2xyz=1$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$和$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 。

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz}{z-xy}\ ,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz}{z-xy}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)(z-xy)-xz(\frac{\partial z}{\partial x}-y)}{(z-xy)^2}=\frac{z^2(z-xy)-x^2y^2z}{(z-xy)^3}$$

2．　设三元函数$f(x,y,z)=arcsin(x^2+y+z^2)$。

（1）　求函数在点$P(\frac{1}{2},-1,-\frac{1}{2})$ 处函数值增加最快的方向；

（2）　求函数在P点沿方向$(1,-1,-1)$的方向导数。

$$f_x'=\frac{2x}{\sqrt{1-(x^2+y+z^2)^2}}\ ,\ f_y'=\frac{1}{\sqrt{1-(x^2+y+z^2)^2}}\ ,\ f_z'=\frac{2z}{\sqrt{1-(x^2+y+z^2)^2}}$$

$$(f_x',f_y',f_z')\big|_P=\frac{2}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$$

(1)P点处函数值增加最快的方向：$(1,1,-1)$

（2）在P点的方向导数 $\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_P=\frac{2}{\sqrt{3}}(1,1,-1)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1)=\frac{2}{3}$

3．　设空间曲面$y^2+2z^2=3x$，(1)求曲面在点$(1,1,-1)$ 处的切平面方程；

(2)求曲面与$2x-3y+5z=4$ 的交线在点$(1,1,1)$ 处的切线方程。

曲面　$F(x,y,z)=\ 3x-y^2-2z^2=0$

$(F_x',F_y',F_z')\big|_A=(3\ ,-2y,-4\mathrm{z})|_A=(3,-2,4)$

（1）　所求切平面方程 $3(x-1)-2(y-1)+4(z+1)=0,$

$3x-2y+4z+3=0$

（2）$(F_x',F_y',F_z')\big|_B=(3,-2,-4)$

切线的方向：$(3,-2,-4)\times(2,-3,5)=(-22,-23,-5)\ \ ||\,(22\ ,\ 23,\ 5)$

所求切线方程：$\frac{x-1}{22}=\frac{y-1}{23}=\frac{z-1}{5}$

4．求平面上由4条直线 $x+2y=2$，$x+2y=5$ 和 $y=2x$ ，$y=2x-1$ 所围闭区域的面积。

作变换：$\begin{cases} u=x+2y \\ v=2x-y \end{cases}$ $\quad \frac{D(u,v)}{D(x,y)}=-5$

面积：$\iint_D dxdy = \int_2^5 du \int_0^1 \frac{1}{5} dv = \frac{3}{5}$

5．求$\iint_D (x+2xy)dxdy$，其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2 \geq a^2, x^2+y^2 \leq 2ax\}$

作极坐标变换：$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ $\quad \frac{D(x,y)}{D(r,\theta)}=r$

两圆交在 $x=\frac{1}{2}a$ $\qquad \iint_D 2xydxdy = 0$

$$\iint_D (x+2xy)dxdy = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_a^{2a\cos\theta} r\cos\theta\, rdr$$

$$= \frac{16}{3}a^3 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^4\theta d\theta - \frac{2}{3}a^3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta d\theta$$

$$= \frac{4}{3}a^3 \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\frac{3}{2}+2\cos2\theta+\frac{1}{2}\cos4\theta)d\theta - \frac{\sqrt{3}}{3}a^3$$

$$= a^3(\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4})$$

6．级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-3)^n+2^n}{4^n}$ 是否收敛？如果收敛求其和。

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-3)^n}{4^n}$ 绝对收敛， 和 $\frac{-\frac{3}{4}}{(1+\frac{3}{4})^2} = -\frac{12}{49}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{4^n}$ 收敛， 和 为 1，

所以 原级数收敛 和为$\frac{37}{49}$

7．将函数$f(x)=x(4-x)$，$x\in(0,4)$ 展开成周期为4的Fourier级数，并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的和。

周期为4， 半周期 $T=2$ ， 偶函数， $\quad a_0=\frac{1}{2}\int_0^4 x(4-x)dx = \frac{16}{3}$

$a_n = \frac{1}{2}\int_0^4 (4x-x^2)\cos\frac{\pi}{2}nxdx = \frac{-16}{n^2\pi^2}$

$f(x)\sim\frac{8}{3}-\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos(\frac{\pi}{2}nx)$ （连续函数， 可用等号）

当 $x=0$ 时， $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{6}\pi^2$

二.（10分）求曲面$y=x^2+z^2$与平面 $x+y-z=3$ 的交线到原点的最远和最近距离。

交线上点(x,y,z)到原点的距离之平方 为$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$

作 Lagrange 函 数 $L(x,y,z,\mu)=x^2+y^2+z^2+\tau(x^2+z^2-y)+\mu(x+y-z-3)$

$$\begin{cases}2(1+\tau)x+\mu=0\\ 2y-\tau+\mu=0\\ 2(1+\tau)z-\mu=0\\ y=x^2+z^2\\ x+y-z=3\end{cases} \qquad \begin{cases}\tau=-1,\mu=0,\quad y=\frac{-1}{2},\ \text{不符合}y=x^2+z^2\\ x+z=0,y=2x^2,x=\frac{-1\pm\sqrt{7}}{2},f(x,y,z)=2x^2+4x^4=27\pm 9\sqrt{7}\end{cases}$$

最远距离 $3\sqrt{3+\sqrt{7}}$ ；最远距离 $3\sqrt{3-\sqrt{7}}$

三.（10分）求积分 $\iiint_\Omega (x+y)dxdydz$，　其中 Ω 为两曲面：

$x^2+z^2=\frac{1}{4}(y+1)^2$ 和 $y=1+\sqrt{1-x^2-z^2}$　所围成的空间区域。

作柱面坐标变换：$\begin{cases}x=r\sin\theta\\ y=y\\ z=r\cos\theta\end{cases}$

$$\iiint_\Omega (x+y)dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_{-1+2r}^{1+\sqrt{1-r^2}}(r\sin\theta+y)dy$$

$$=0+2\pi\int_0^1\frac{1}{2}r\left[\left(1+\sqrt{1-r^2}\right)^2-(-1+2r)^2\right]dr$$

$$=\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{4}+\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\right)=\frac{5\pi}{4}$$

四.（11分）求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n(n+1)}(x+1)^{n-1}$ 的收敛域与和函数，并求级数

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)2^n}$ 的和。

收敛半径: $R=\frac{1}{2}$ ，当$-\frac{3}{2}<x<-\frac{1}{2}$ 幂级数绝对收敛；在两端点处，级数收敛

幂级数的收敛域 $[-\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2}]$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n(n+1)}(x+1)^{n-1}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{n(n+1)}(x+1)^{n-1}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}(2(x+1))^{n-1}$

设$s(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n+1}}{n(n+1)}$，则 $s''(t)=\sum_{n=1}^{\infty}t^{n-1}=\frac{1}{1-t}$

$s'(t)=\int_0^t\frac{1}{1-x}dx=-\ln(1-t)$，$s(t)=-\int_0^t\ln(1-x)\,dx=t+(1-t)\ln(1-t)$

$s(2(x+1))=2(x+1)+(1-2(x+1))\ln(1-2(x+1))$

当$x=-1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n(n+1)}(x+1)^{n-1}=1$

当$x\neq-1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n(n+1)}(x+1)^{n-1}=\frac{2s(2(x+1))}{(2(x+1))^2}=\frac{1}{x+1}-\frac{(2x+1)\ln(-2x-1)}{2(x+1)^2}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)2^n}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n(n+1)}(-\frac{3}{4}+1)^{n-1}=\frac{1}{4}(4-4\ln 2)=1-\ln 2$

五．（10分）设$f(x)$有一阶连续的导函数，$f(0)=0$；且微分方程：

$(yf(x)+y^2+2xy)dx+(f(x)+2xy)dy=0$ 是全微分方程。

（1）求$f(x)$，（2）写出全微分方程的通解。

是全微分方程，则$f(x)+2y+2x=f'(x)+2y$

那么$f(x)$ 是定解问题$\begin{cases}f'(x)-f(x)=2x\\ f(0)=0\end{cases}$ 的解

通解为 $f(x)=-2x-2+ce^x$ ，$f(x)=2(e^x-x-1)$

设全微分方程的通解 $u(x,y)=2y(e^x-x-1)+xy^2+\varphi(x)=C_0$

$\varphi'(x)=0$

全微分方程的通解 $u(x,y)=2y(e^x-x-1)+xy^2=C$

六．（10分）设$f(x)$是以2π 为周期的二阶可导函数，且已知$f(0)=0$, 并满足等式

$f(x)+2f'(\pi+x)=sin3x$， 求 $f(x)$.

等式两边求导 $f'(x)+2f''(\pi+x)=3cos3x$

由于$f(x)$以 2π 为周期 ， 那么$f'(x+\pi)+2f''(2\pi+x)=f'(x+\pi)+2f''(x)$

而 $cos3(x+\pi)=-cos3x$

则有方程 $2f''(x)+f'(x+\pi)=2f''(x)+\frac{1}{2}\left(sin3x-f(x)\right)=-3cos3x$

那么$f(x)$ 是定解问题$\begin{cases}4f''(x)-f(x)=-sin3x-6cos3x\\ f(0)=0，f'(\pi)=0\end{cases}$ 的解

齐次方程的通解： $C_1e^{\frac{1}{2}x}+C_2e^{\frac{-1}{2}x}$

非齐次方程的一个特解： $\frac{1}{37}sin3x+\frac{6}{37}cos3x$

非齐次方程的通解： $C_1e^{\frac{1}{2}x}+C_2e^{\frac{-1}{2}x}+\frac{1}{37}sin3x+\frac{6}{37}cos3x$

由定解条件确定二个任意常数$\begin{cases}C_1+C_2+\frac{6}{37}=0\\ C_1e^{\frac{1}{2}\pi}-C_2e^{\frac{-1}{2}\pi}-\frac{6}{37}=0\end{cases}$

得 $C_1=\frac{6\left(e^{\frac{1}{2}\pi}-1\right)}{37(e^{\pi}+1)}$ ， $C_2=-\frac{6\,e^{\frac{1}{2}\pi}\left(e^{\frac{1}{2}\pi}+1\right)}{37(e^{\pi}+1)}$

C_1，C_2不为 0，函数$f(x)$包含指数部分，它不是周期函数，故不存在函数满足条件。