复旦大学数学科学学院

2016～2017 学年第一学期期末考试试卷

A 卷

课程名称：高等数学 B(上)　　课程代码：MATH 120003

开课院系：数学科学学院　　考试形式：闭卷

题 号	1	2	3	4	5	6	7	总 分
得 分								

姓 名：　学 号：　专 业：

（装订线内不要答题）

一．计算题

1．

令 $u_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{2n-1}{3\cdot 2^{n-1}}$，则 $\frac{3}{4}u_n=\frac{3}{2}u_{n+1}-\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i}+\frac{1}{2}\right)$，令 $\lim_{n\to\infty}u_n=u$，

$\Rightarrow\frac{3}{4}u=\frac{3}{2}u-\frac{3}{2}\Rightarrow u=2$。

2．

2。提示：利用 Taylor 展开即可。

3．

首先，转化为求自然对数的极限 $\lim_{x\to\infty}\ln\left(\mathrm{e}^{x^{\frac{1}{3}}}\left(1-x^{-\frac{1}{3}}\right)^{x^{\frac{2}{3}}}\right)=-\frac{1}{2}$。

所以，原极限 $=e^{-\frac{1}{2}}$。

4．

$\ln y=\frac{1}{2x}+\frac{1}{4}\ln x+\frac{1}{8}\ln\cos x$，

$\frac{y'}{y}=-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{4x}+\frac{1}{8\cos x}(-\sin x)$，

$$y' = y\left(-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{4x}-\frac{1}{8}\tan x\right)。$$

5.

$$原式=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx=\cdots=\sec x\tan x-\int\tan^2 x\sec x dx-\int\sec x dx，$$

$$又\int\sec x dx=\ln\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\Rightarrow\ 原式=\frac{1}{2}\left[\sec x\tan x+\ln\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right]+C。$$

6.

令 $x=\mathrm{e}^u$，原式 $=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u(1-u)}}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}2\mathrm{d}t=\frac{\pi}{6}$ （令 $u=\sin^2 t$）。

7.

原式 $=\dfrac{1}{b^2(b^2+1)^{\frac{1}{2}}}$。

8.

$P:=(0,4,2)$ ，$P_0:=(-1,1,0)$ 位于直线上，

$\overrightarrow{P_0P}:=(1,3,2)$ ，方向向量 $\vec{v}$：$(1,2,4)$，

$\overrightarrow{P_0P}\times\vec{v}=8\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}$，

$$d=\frac{\left\|\overrightarrow{P_0P}\times\vec{v}\right\|}{\|\vec{v}\|}=\sqrt{\frac{69}{21}}。$$

二.

$x=\frac{1}{5}$ 为极小值点，极小值 $-\frac{9}{5}\left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$，

$x=-1$ 为极大值点，极大值为 0。

三.

利用 Cauchy 中值定理。

四.

直线方程为：$\frac{x\text{-}1}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}\Rightarrow\begin{cases}x=1-z,\\ y=z.\end{cases}$

所以，截面半径为$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(1-z)^2+z^2}\Rightarrow V=\pi\int_0^1(1-2z+2z^2)dz=\frac{2}{3}\pi$。

五.

$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}\Rightarrow|A^*|=|A|^2$，又$|A^*|=4\ \Rightarrow\ |A|=\pm 2$。

若$|A|=2$，

$$A=\left(\frac{A^*}{2}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}3&2&1\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}。$$

若$|A|=-2$，

$$A=\begin{pmatrix}-3&-2&-1\\-1&-1&-1\\-1&0&-1\end{pmatrix}。$$

六.

1． $0<x<\frac{\pi}{4}$， $0<\tan x<1$，所以$\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\tan xdx<\int_0^{\frac{\pi}{4}}xdx=\frac{\pi^2}{32}$。

2． $\int_0^{\frac{\pi}{4}}(x\tan x-\frac{\pi}{8}\tan x)dx=-\int_0^{\frac{\pi}{8}}(\frac{\pi}{8}-x)\tan xdx+\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}}(x-\frac{\pi}{8})\tan xdx$

$\geq\tan\frac{\pi}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(x-\frac{\pi}{8})dx=0$。

故得证。

七.

1．易见$m_{j,k}=(j+k)!$。

$$D_n=\begin{vmatrix}0!&1!&\cdots&n!\\1!&2!&\cdots&(n+1)!\\&\cdots&&\\n!&(n+1)!&\cdots&(2n)!\end{vmatrix}$$ 分步消去第一列元素，

$$D=\begin{vmatrix}0! & 1! & \cdots & n! \\ 0 & 1!\cdot 1 & \cdots & n!\cdot n \\ & \cdots & & \\ 0 & n!\cdot 1 & \cdots & (2n-1)!\cdot n\end{vmatrix}=n!\begin{vmatrix}0! & 1! & \cdots & n! \\ 0 & 1! & \cdots & n! \\ & \cdots & & \\ 0 & n! & \cdots & (2n-1)!\end{vmatrix}。$$

$=$(依次消去对角线下方元素)$\cdots$

$$D=\prod_{k=0}^{n}k!\begin{vmatrix}0! & 1! & \cdots & n! \\ & 1! & \cdots & n! \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & n!\end{vmatrix}=\prod_{k=0}^{n}(k!)^2。$$

2． $\forall x^i$， $0\le i\le k-1$，

$$\int_0^{+\infty}q_k(x)x^ie^{-x}dx=\frac{1}{D_{k-1}}\det\begin{pmatrix}m_{0,0} & m_{0,1} & \cdots & m_{0,\mathrm{k}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{\mathrm{k}-1,0} & m_{\mathrm{k}-1,1} & \cdots & m_{\mathrm{k}-1,\mathrm{k}} \\ m_{\mathrm{i},0} & m_{\mathrm{i},1} & \cdots & m_{\mathrm{i},\mathrm{k}}\end{pmatrix}=0。$$

故得证。