（装订线内不要答题）

复旦大学数学科学学院

2010～2011学年第一学期期末考试试卷

□ A 卷

课程名称： 高等数学B(上)　　**课程代码：** MATH120003

开课院系： 数学科学学院　　**考试形式：** 闭卷

姓　名： ________ **学　号：** ________ **专　业：** ____________

题　目	1	2	3	4	5	6	7	8	总分
得　分									

一、计算题(每小题6分，共36分)

1. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2n+\sin n}$ 。

   解： $\sqrt[n]{2n-1}\le\sqrt[n]{2n+\sin n}\le\sqrt[n]{2n+1}$,

   $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2n-1}=1$,

   $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2n+1}=1$,

   由夹逼定理得， $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2n+\sin n}=1$ 。

2. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x\ln(1+x)}$ 。

   解：由L'Hospital法则，得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x\ln(1+x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{-x}{x+(1+x)\ln(1+x)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-1}{2+\ln(1+x)}=-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

3. 求由参数方程

$$\begin{cases} x = 3t - t^3 \\ y = 2t - t^2 \end{cases}$$

所确定的函数$y(x)$的二阶导数$\frac{d^2y}{dx^2}$ 。

解：$\frac{dy}{dx} = \frac{2-2t}{3-3t^2}$,

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})/\frac{dx}{dt} = \frac{-2}{9(1+t)^3(1-t)}$.

4. 求不定积分$\int (2+x)\sqrt{1-x^2}\,dx$ 。

解：$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int \sqrt{1-x^2}\,d(1-x^2) = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C$,

$$\begin{aligned} & \int (2+x)\sqrt{1-x^2}\,dx \\ = \;& -\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x + C. \end{aligned}$$

5. 求不定积分$\int \sin^4 x\,dx$ 。

解：由三角函数公式，得

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x\,dx &= \frac{1}{8}\int [3 - 4\cos(2x) + \cos(4x)]\,dx \\ &= -\frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\sin(4x) + C. \end{aligned}$$

6. 求定积分$\int_0^1 x\ln(1+x)\,dx$ 。

解：由分步积分公式，得

$$\begin{aligned} \int_0^1 x\ln(1+x)\,dx &= \frac{1}{2}x^2\ln(1+x)|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\int_0^1 [x - 1 + \frac{1}{1+x}]\,dx \\ &= \frac{1}{2}\ln 2 - [\frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln(1+x)]|_0^1 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

二、应用计算题(每小题6分，共24分)

1. 求$P_1(1,0,0)$, $P_2(0,-4,4)$和$P_3(-5,1,5)$构成的三角形的面积。

解：$P_1P_2=(-1,-4,4)$, $P_1P_3=(-6,1,5)$,

$P_1P_2\times P_1P_3=(-24,-19,-25)$, $\quad\|P_1P_2\times P_1P_3\|=\sqrt{1562}$

三角形的面积为$\frac{\sqrt{1562}}{2}$ 。

2. 求由方程$x-y+\frac{1}{2}\sin y=0$所确定的隐函数$y(x)$在点$(0,0)$处的切线方程 。

解：$1-y'+\frac{1}{2}y'\cos y=0$, 得到$y'(0)=2$, 切线方程为$y=2x$.

3. 求由曲线$y=x^2$和直线$y=1$所围图形绕x轴旋转一周，所得旋转体的体积。

解：$\int_{-1}^{1}\pi(1-x^4)\,dx=\frac{8\pi}{5}$, 故所得旋转体的体积为$\frac{8\pi}{5}$.

4. 求方程$3^x-6x+1=0$的实根个数。(需写出详细过程)

解：令$f(x)=3^x-6x+1$, $f(-\infty)=f(+\infty)=+\infty$,

$f'(x)=3^x\ln 3-6$, 从而当$x<\frac{\ln 6-\ln(\ln 3)}{\ln 3}$时$f'(x)<0$; 当$x>\frac{\ln 6-\ln(\ln 3)}{\ln 3}$时$f'(x)>0$. 同时$f(1)<0$.故有2个实根。

三、(每小题5分，共10分)

(1) 求过点$P(1,0,0)$，与直线$l_0:\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{2}$相交，而且与平面$\pi:x-y+z+2=0$平行的直线方程$l_1$。

(2) 求直线l_0绕直线l_1旋转一周生成的旋转曲面方程，并指出该曲面的名称。

解：

(1) 设l_1的方向为(X,Y,Z)，与平面π平行，所以有$X-Y+Z=0$;
又l_1过点$P(1,0,0)$，与直线l_0相交，故

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ 1 & 1 & 2 \\ 2-1 & 3-0 & 4-0 \end{vmatrix} = 0;$$

从而

$$\begin{cases} X-Y+Z=0, \\ -2X-2Y+2Z=0, \end{cases}$$

$X=0$,令$Y=1$,则$Z=1$. 故直线方程为

$$l_1:\begin{cases} x=1 \\ y=z. \end{cases}$$

(2) 直线l_0与l_1相交于$P_0:(1,2,2)$, l_0和l_1的方向分别为$\alpha=(1,1,2)$, $\beta=(0,1,1)$。由$\frac{\alpha\cdot\beta}{\|\alpha\|\|\beta\|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$得到$\alpha,\beta$夹角为$\frac{\pi}{3}$. 设所求旋转曲面为$\Gamma$, 在$\Gamma$上任取一点$P:(x,y,z)$, 则$\frac{P_0P\cdot\beta}{\|P_0P\|\|\beta\|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 故旋转曲面为锥面，方程为

$$2(y+z-4)^2=3[(x-1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2].$$

四、(每小题5分，共10分)

(1) 判别广义积分$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}(1+e^{-x})\,dx$ (其中$p>0$) 的敛散性。

(2) 已知$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$，计算广义积分$\int_0^{+\infty}\sqrt{x}e^{-x^3}\,dx$ 。

解:

(1) 对于$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^p}(1+e^{-x})\,dx$，由于当$x\to 0$时，$\frac{\ln(1+x)}{x^p}(1+e^{-x})\sim \frac{1}{x^{p-1}}$, 故当$p<2$时收敛,当$p\geq 2$时发散；

对于$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^p}(1+e^{-x})\,dx$，当$p>1$时收敛,当$p\leq 1$时发散；

故当$1<p<2$时$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^p}(1+e^{-x})\,dx$收敛,当$p\geq 2$或者$p\leq 1$时$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^p}(1+e^{-x})\,dx$发散；

(2) 令$u=x^3$, $\int_0^{+\infty}\sqrt{x}e^{-x^3}\,dx=\frac{1}{3}\int_0^{+\infty}u^{-\frac{1}{2}}e^{-u}\,du=\frac{1}{3}\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{\pi}}{3}$.

五、(本题7分) 求$\cos^2(\sin x)$的带Peano余项的6阶Maclaurin公式。

解：$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^6)$,

$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+o(x^6)$,

$\cos^2 u=\frac{1+\cos(2u)}{2}$,

故 $\cos^2(\sin x)=1-x^2+\frac{2}{3}x^4-\frac{14}{45}x^6+o(x^6)$.

六、(本题8分) 求$\lim\limits_{n\to\infty}\{[(\frac{1}{n})^p+(\frac{2}{n})^p+\cdots+(\frac{n-1}{n})^p+(\frac{n}{n})^p]\sin\frac{1}{n}\}$，其中$p>-1$ 。

解：由于$\sin\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n}$， 故

$$\lim_{n\to\infty}\{[(\frac{1}{n})^p+(\frac{2}{n})^p+\cdots+(\frac{n-1}{n})^p+(\frac{n}{n})^p]\sin\frac{1}{n}\}=\int_0^1 x^p\,dx=\frac{1}{1+p}.$$

七、证明题(本题5分) 如果$0\leq p\leq 1$; $\alpha\geq 0$, $\beta\geq 0$, $\gamma\geq 0$, 而且$\alpha+\beta\geq\gamma$, 则$\alpha^p+\beta^p\geq\gamma^p$ 。

证明: 定义 $g(x)=x^p+\beta^p-(x+\beta)^p, x\geq 0$.

有 $g'(x)=p[x^{p-1}-(x+\beta)^{p-1}]$.

由于$0\leq p\leq 1$, $x,\beta\geq 0$, 所以$g'(x)\geq 0$, 从而$g(\alpha)\geq g(0)=0$. 即

$$\alpha^p+\beta^p\geq(\alpha+\beta)^p\geq\gamma^p.$$