复旦大学数学科学学院

2016～2017 学年第二学期期末考试试卷

A 卷

课程名称：__高等数学 B(下)__　课程代码：MATH120004____

开课院系：__数学科学学院__　考试形式：__闭卷__

题 号	一	二	三	四	五	六	总 分
得 分							

姓 名：________ 学 号：________ 专 业：________

（装订线内不要答题）

一（48 分，每小题 6 分,共 8 小题）

1 求 $f(x,y,z)=xyz$ 在点 $(1,2,3)$ 处的全微分。

解 $df(1,2,3)=6(x-1)+3(y-2)+2(z-3)$

2 求 $f(x,y,z)=\dfrac{1}{1+x+yz}$ 在点 $(1,1,-1)$ 处沿着方向 $\vec{\ell}(1,1,-1)$ 的方向导数。

解 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)$

3 交换二次积分的次序：$\int_0^1 dx\int_{\sqrt{x}}^{2-x} f(x,y)dy$

解 $\int_0^1 dy\int_0^{y^2} f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_0^{2-y} f(x,y)dx$

4 计算二重积分：$\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} \left|y-x^2\right| d\,x\,d$。

解 $\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} \left|y-x^2\right| dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{x^2}\left(x^2-y\right)dy+\int_0^1 dx\int_{x^2}^1\left(y-x^2\right)dy=\dfrac{1}{10}+\left(\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{10}\right)=\dfrac{1}{6}$

5 求方程 $x^2 y'' = (y')^2 + 2xy'$ 的一个通解。

解 令 $y' = p$，原方程变为 Bernoulli 方程：$x^2 \frac{dp}{dx} - 2xp = p^2$。显然若 $p = 0$，则 $y = C$ 为一个常函数，是方程的一个解。当 $p \neq 0$ 时，再令 $u(x) = p^{-1}$，则有一阶线性方程 $\frac{du}{dx} + \frac{2}{x}u = -\frac{1}{x^2}$，该方程有通解 $u(x) = \frac{C_1 - x}{x^2}$，其中 C_1 为一个任意常数。于是有 $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{C_1 - x}$。得一通解

$$y = -C_1 x - \frac{1}{2}x^2 - C_1{}^2 \ln|C_1 - x| + C_2,$$

其中 C_1, C_2 为独立常数。

6 求解 $y'' - y = x^2 + 1 + \mathrm{e}^x$。

解 $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + \frac{1}{2}xe^x - x^2 - 3$。

7 计算积分 $\iiint\limits_D (z^3 + xy)dxdydz$，其中 D 是上半球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$，$z \geq 0$。

解 $\iiint\limits_D z^3 dxdydz = \int_0^1 dz \iint\limits_{x^2+y^2 \leq 1-z^2} z^3 dxdy = \int_0^1 z^3 \pi(1 - z^2)dz = \frac{\pi}{12}$。

8 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{2n}$ 的和函数。

解 令 $T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{2n}$，则 $T(0) = 0$。$T(x) = -\frac{\ln|1 - x^2|}{x^2} - 1, x \neq 0$。

二 （**11** 分）设 (x_0, y_0, z_0) 是抛物面 $z = 1 + x^2 + y^2$ 上的任意一点，求这个抛物面在该点处的切平面与另一个抛物面 $z = x^2 + y^2$ 所围成的有界立体的体积。

解 抛物面 $z = 1 + x^2 + y^2$ 在 (x_0, y_0, z_0) 处的切平面为:

$$z = 1 + 2x_0 x + 2y_0 y - {x_0}^2 - {y_0}^2。$$

它与抛物面 $z = x^2 + y^2$ 的交线所围成的区域在 Oxy 坐标平面上的投影是 D: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \le 1$，因此切平面与另一抛物面所围成的立体体积为:

$$\iint_D \left(1 + 2x_0 x + 2y_0 y - {x_0}^2 - {y_0}^2 - x^2 - y^2\right) dxdy = \iint_{x^2+y^2\le 1} \left(1 - x^2 - y^2\right) dxdy = \frac{\pi}{2}。$$

三 （**11** 分）设 $f(x) = x - 4,\ x \in (2,4)$。

1）将 $f(x)$ 延拓成 $(-\infty, +\infty)$ 上以 4 为最小周期的周期函数，且是奇函数;

2）给出 $f(x)$ 的 Fourier 展开式;

3）证明: $\dfrac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$。

解 $f(x)$ 的 Fourier 展开式为 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{4(-1)^n}{n\pi} \sin \dfrac{n\pi x}{2}$。

再由能量恒等式，有 $\dfrac{1}{2}\int_{-2}^{2} f^2(x) dx = \int_0^2 x^2 dx = \dfrac{8}{3} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{16}{n^2\pi^2}$，即 $\dfrac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$。

四（**10** 分）设 p, q 是两个正实数参数,，试讨论幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^p \ln^q n}$ 的收敛域。

解 幂级数的收敛半径为 1。$p > 1$ 时，收敛域为 $[-1,1]$; $p < 1$ 时，收敛域为 $[-1,1)$; $p = 1,\ q > 1$ 时，收敛域为 $[-1,1]$; $p = 1,\ q \le 1$ 时，收敛域为 $[-1,1)$。

五 （**10** 分）求函数 $f(x,y)=4x-4y-x^2-y^2-z^2$ 在区域 D: $x^2+y^2+z^2\le 6$ 上的最大值和最小值。

解 区域内部无驻点，故函数的最大值最小值在边界上取到。作辅助函数 $L(x,y,z,\lambda)=4x-4y-6+\lambda\left(x^2+y^2+z^2-6\right)$，得两驻点 $P_1\left(\sqrt{3},-\sqrt{3},0\right)$，$P_2\left(-\sqrt{3},\sqrt{3},0\right)$。则 $f\left(P_1\right)=8\sqrt{3}-6$ 和 $f\left(P_2\right)=-8\sqrt{3}-6$ 分别为函数的最大值和最小值。

六 （**10** 分）设 $\left[0,+\infty\right)$ 上的连续函数 $f(t)$ 满足下面的方程，

$$f(t)=t^6+t^3+1+\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2} f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)dxdydz,$$

求 $f(t)$ 的一个表达式。

解 $f(t)=t^6+t^3+1+\dfrac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}d\phi\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^t f\left(r\right)r^2\sin\phi dr=t^6+t^3+1+\int_0^t f\left(r\right)r^2dr$。

对上式求导数，得 $f'\left(t\right)=6t^5+3t^2+f\left(t\right)t^2$。 $f(t)$ 是下面定解问题的解：

$\dfrac{dy}{dt}-t^2y=6t^5+3t^2, y\left(0\right)=1$。解之得

$$f(t)=e^{\int_0^t t^2dt}\left[1+\int_0^t\left(6t^5+3t^2\right)e^{\int_0^t -t^2dt}dt\right]=22e^{\frac{1}{3}t^3}-6t^3-21。$$

（装订线内不要答题）