复旦大学自然科学试验班、经济管理试验班
2011 ～2012 学年第 一 学期期末考试试卷（A 卷）

课程名称：高等数学（B）　　课程代码：MATH120003

开课院系：数学科学学院　　考试形式：闭卷

姓　名：________　　学　号：________　　专　业：________

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	总 分

一．选择题（15 分）

1． 设函数 $g(x)$ 在 $x=0$ 点某邻域内有定义，若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-g(x)}{\sin x}=1$ 成立，则[ ]。

A. $g(x)$ 在 $x=0$ 点连续，但不可导

B. $g(x)$ 在 $x=0$ 点可导但导数不为 0

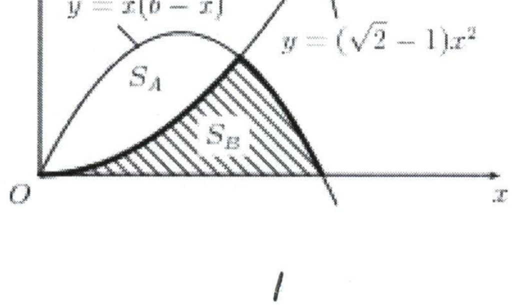
C. $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$ 存在，但 $g(x)$ 在 $x=0$ 点不连续

D. $x\to 0$ 时，$g(x)$ 是 x 的高阶无穷小量

2. 已知 $f(x)=3x^2+kx^{-3}(k>0)$，当 $x>0$ 时，总有 $f(x)\geq 20$ 成立，则参数 k 的最小取值是[ ]。

A. 32　　B. 64　　C. 72　　D. 96

3. 如题图，抛物线 $y=\left(\sqrt{2}-1\right)x^2$ 把 $y=x(b-x)(b>0)$ 与 x 轴所构成的区域面积分为 S_A 与 S_B 两部分，则[ ]。



A. $S_A < S_B$　　B. $S_A = S_B$　　C. $S_A > S_B$

D. S_A与S_B大小关系与b的数值有关

二．填空题(15 分)

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{5^n+3}{n}} =$ _ 。

2. 设$\begin{cases} x=\int_1^t \sqrt{\ln u}du, \\ y=\int_1^{t^2} \sqrt{\ln u}du, \end{cases}$ $(t>1)$，求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

3.设一平面经过原点及$M(6,-3,2)$,且与平面$4x-y+2z=8$垂直，则此平面方程为_ 。

三．计算题（20 分）

1. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x^y=y^x$ 确定，求 $y'(1)$。

2.求 $\int(2^x+3^x)^2dx$。

3.利用 $Taylor$ 展开式求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)\right)$。

4. 求由抛物线 $(y-2)^2=x-1$ 和与抛物线相切于纵坐标 $y_0=3$ 处的切线以及 x 轴所围成的图形面积。

四．试就 p 的不同取值,判断反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{x^p}dx$ 的敛散性。（**8** 分）

五．判断方程 $e^{-\frac{x}{2}}=|x-1|$ 在区间 $[-2,2]$ 中共有几个实根，并简要证明你的结论。（**8** 分）

六．设D是位于曲线$y=\sqrt{x}a^{-\frac{x}{2a}}(a>1,0\le x<+\infty)$下方，$x$轴上方的无界区域。（1）求区域$D$绕$x$轴旋转一周所成旋转体的体积$V(a)$；

（2）当a为何值时，$V(a)$最小？并求此最小值。（8 分）

七．求直线$l:\begin{cases}x=2t,\\ y=k,k\neq 0\\ z=t.\end{cases}$绕$z$轴旋转一周生成的旋转曲面方程，并指出所得旋转曲面的类型。（8 分）

八．已知函数$y=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$，求（1）函数的增减区间及极值；

（2）函数的凸凹区间及拐点；（3）函数图形的渐近线。（9 分）

九．设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在二阶导数，且 $g''(x)\neq 0$，

$f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$，证明：

（1）在开区间(a,b)内，$g(x)\neq 0$；

（2）在在开区间(a,b)内至少存在一点ξ，使得$\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$。（9 分）