

复旦大学数学科学学院

2015~2016 学年第一学期期末考试试卷

《高等数学 B (I)》试题答案

1. (本题满分 40 分, 每小题 5 分) (1) ± 16 ; (2) $\frac{2}{3}$; (3) 在 $(-1, e^{-1}-1]$ 上单调减少, 在 $[e^{-1}-1, +\infty)$ 上单调增加; $f(e^{-1}-1) = -e^{-1}$ 为极小值;

(4) $\frac{1}{2} \arcsin \frac{x^2}{2} + C$; (5) $e^{-2} \left(1 - \frac{1}{e}\right)^2$;

(6) 收敛; (7) $\begin{pmatrix} 14 & 8 & 3 \\ 8 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; (8) $x - 2y + z = 0$ 。

2. (本题满分 10 分) 3 个。

3. (本题满分 10 分) 底面半径和高均为 $\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ 。

4. (本题满分 10 分) (1) $f(x) = 28x^6 + cx$ (c 为任意常数); (2) 无拐点; (3) 不存在。

5. (本题满分 10 分) 证: 作函数

$$f(x) = \ln(1+x) - \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right), \quad x > -1,$$

则当 $x \in (-1, +\infty)$ 时,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x} - 1 + x - x^2 + x^3 \\ &= \frac{1}{1+x} - (1-x)(1+x^2) = \frac{1 - (1-x^2)(1+x^2)}{1+x} \\ &= \frac{x^4}{1+x} > 0. \end{aligned}$$

这说明函数 f 在 $[0, +\infty)$ 上严格单调增加, 从而当 $x > 0$ 时,

$$f(x) > f(0) = 0,$$

即

$$\ln(1+x) > x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4.$$

6. (本题满分 10 分) (1) 证: 由 $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) 知 $\sin \frac{\pi}{2}x \geq x$ ($0 \leq x \leq 1$),

所以

$$\int_0^1 \left(1 + \sin \frac{\pi}{2} x\right)^n dx \geq \int_0^1 (1+x)^n dx = \frac{1}{n+1} (1+x)^{n+1} \Big|_0^1 = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

(2) 由于

$$\frac{2^n}{n+1} < \frac{2^{n+1}-1}{n+1} \leq \int_0^1 \left(1 + \sin \frac{\pi}{2} x\right)^n dx \leq \int_0^1 (1+1)^n dx = 2^n,$$

利用极限的夹逼性可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_0^1 \left(1 + \sin \frac{\pi}{2} x\right)^n dx \right]^{\frac{1}{n}} = 2.$$

7. (本题满分 10 分) (1) L 的方向向量可取为

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ c & 1 & 1 \\ 1 & -c & c \end{vmatrix} = 2c\mathbf{j} + (1-c^2)\mathbf{j} - (1+c^2)\mathbf{k},$$

因此 L 的对称式方程为

$$\frac{x+1}{2c} = \frac{y-c}{1-c^2} = \frac{z-c}{-1-c^2}.$$

(2) 在以上方程中令 $z=t$, 得

$$x = \frac{-2ct + (c^2 - 1)}{1 + c^2} = A - Bt,$$

$$y = \frac{2c + (c^2 - 1)t}{1 + c^2} = At + B,$$

其中 $A = \frac{c^2 - 1}{1 + c^2}$, $B = \frac{2c}{1 + c^2}$.

显然 $A^2 + B^2 = 1$, 于是

$$x^2 + y^2 = A^2(1+t^2) + B^2(1+t^2) = 1+t^2,$$

因此曲面 Σ 与平面 $z=t$ 的交线的方程为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1+t^2, \\ z = t. \end{cases}$$

(3) 由(2)知, 过 $(0, 0, z)$ 点且与 Oxy 平面平行的平面截由曲面 Σ , 平面 $z=0$ 和 $z=1$ 所围立体的截面均为圆, 其面积为

$$A(z) = \pi(1+z^2),$$

因此该立体的体积为

$$V = \int_0^1 A(z) dz = \pi \int_0^1 (1+z^2) dz = \frac{4\pi}{3}.$$