复旦大学数学科学学院

2007～2008 学年第二学期期末考试试卷

☑ A 卷　☐ B 卷

课程名称：高等数学 B(下)　课程代码：MATH120004.02.05

开课院系：数学科学学院　考试形式：闭卷

姓　名：________　学　号：________　专　业：________

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	总 分
得 分									
题 号	9	10	11	12					
得 分									

(以下为试卷正文)

注意：答题应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

1. （6 分）当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，函数 $f(x,y)=\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y}$ 的极限是否存在，为什么？

2. （6 分）求由方程组 $\begin{cases} x=e^u+u\sin v \\ y=e^u-u\cos v \end{cases}$ 确定的映射 $(x,y)^T\to(u,v)^T$ 的 Jacobi 矩阵。

3. （6 分）求函数 $f(x,y)=x^4+y^4-4xy+1$ 的极值。

4. （6 分）讨论级数 $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln^2 n}{n}$ 的收敛性（包括条件收敛与绝对收敛）。

5. （6 分）交换 $\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx$ 的积分顺序。

6. （6 分）求微分方程 $\sin x\cos y\,dx+\sin y\cos x\,dy=0$ 的通解。

7. （8 分）求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ 的和函数。

8. （10 分）设 $f(x)$ 具有二阶连续偏导数，$z=f(e^x\sin y)$ 满足 $z_{xx}''+z_{yy}''=e^{2x}z$，求 $f(x)$。

（8 分）求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ 的和函数。

（10 分）设 $f(x)$ 具有二阶连续偏导数，$z=f(e^x\sin y)$ 满足 $z''_{xx}+z''_{yy}=e^{2x}z$，求 $f(x)$。

9. （10 分）设 $f(x,y)=\begin{cases} x^2\arctan\dfrac{y}{x}+y^2\arctan\dfrac{x}{y}, & xy\neq 0 \\ 0, & xy=0 \end{cases}$，求 $f_x'(0,y)$，$f_y'(x,0)$，$f_{xy}''(0,0)$，$f_{yx}''(0,0)$。

10. （12 分）设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，且满足 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1$，又 $g(x,y)=f\left(\dfrac{1}{2}\left(x^2-y^2\right),xy\right)$，求 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$。

11. （10 分）求二重积分 $\iint\limits_D \left|x^2+y^2-1\right| d\sigma$ ，其中 $D=\{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$。

12. （14 分）验证函数 $y(x)=1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^9}{9!}+\cdots\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots\ (-\infty<x<+\infty)$ 满足微分方程

$y''+y'+y=e^x$，并求出幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数。