（装订线内不要答题）

复旦大学复旦学院

2009～2010 学年第一学期期末考试试卷

☑A 卷　　□B 卷

课程名称：高等数学 **B**（上）　　课程代码：MATH120003.02

开课院系：数学科学学院　　考试形式：闭卷

姓　名：　　学　号：　　专　业：

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	总 分
得 分											

一、（10 分）判断下列叙述是否正确：

1．若 $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$．（ √ ）

2．初等函数在定义区间内部一定可导.（ × ）

3．若 $f(x)$在 x_0 处取得极大值或极小值，则 $f'(x_0)=0$．（ × ）

4．若 $f(x)$ 可导，则 $\int f'(x)dx=f(x)$.（ × ）

5．向量 **a** 与 **b** 的外积等于以 **a** 与 **b** 为邻边的平行四边形的面积.（ × ）

二、（10 分）求下列极限：

1．$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{2n^2-n+1/n}=\dfrac{1}{2}$．（5 分）

2．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-1}{e^x-1}=\dfrac{1}{2}$.（5 分）

三、（10 分）计算下列微分或导数：

1．设 $y=e^x\ln x$，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

解：$\dfrac{dy}{dx}=e^x\ln x+e^x\dfrac{1}{x}=e^x\left(\ln x+\dfrac{1}{x}\right)$.（5 分）

2．设 $xy=e^{x+y}$，求 dy.

解：$ydx+xdy=e^{x+y}(dx+dy)$;（3 分）

$(e^{x+y}-x)dy=-(e^{x+y}-y)dx$，　$dy=-\dfrac{e^{x+y}-y}{e^{x+y}-x}dx$.（2 分）

四、（10 分）求下列不定积分与定积分：

1． $\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

解： $\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx = -\int \frac{1}{1+\cos^2 x}d\cos x$ （2 分）

$= -\arctan(\cos x) + C$ （3 分）

2． $\int_0^1 \ln(1+x)dx$.

解： $\int_0^1 \ln(1+x)dx = x\ln(1+x)\Big|_0^1 - \int_0^1 x d\ln(1+x)$ （2 分）

$= \ln 2 - \int_0^1 \frac{x}{1+x}dx = \ln 2 - (x - \ln(1+x))\Big|_0^1 = 2\ln 2 - 1$ （3 分）

五、（10 分）讨论函数 $y = \frac{x^3-1}{x}$ 的定义域（1 分）、单调性（2 分）、极值（1 分）、凸性（2 分）、拐点（1 分）、渐近线（1 分），并作出大致图象（2 分）.

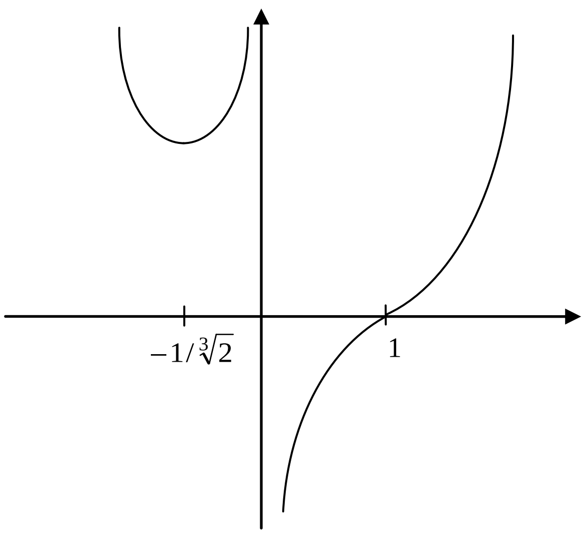
解：定义域 $D(y) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

$y' = \frac{2x^3+1}{x^2}$，驻点 $x = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$． $y'' = \frac{2x^3-2}{x^3}$，拐点(1, 0).

x	$(-\infty, -1/\sqrt[3]{2})$	$-1/\sqrt[3]{2}$	$(-1/\sqrt[3]{2}, 0)$	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y'	–	0	+	+	+	+
y''	+	+	+	–	0	+
y	↘下凸	极小值 $\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$	↗下凸	↗上凸	拐点 $(1, 0)$	↗下凸

$\lim\limits_{x\to 0-0} \frac{x^3-1}{x} = +\infty$， $\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{x^3-1}{x} = -\infty$， $x = 0$ 是垂直渐近线，没有水平和斜渐近线.

作图：



六、（10 分）求 $y=x^2$， $x=1$ 与 x 轴所围图形的面积及该图形绕 y 轴旋转所成旋转体的体积.

解：面积 $=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$.　（4 分）

旋转体体积 $=2\pi\int_0^1 x\cdot x^2dx=\frac{\pi}{2}$.　（6 分）

七、（10 分）设 $p\ge 0$，讨论反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{x^p}dx$ 的敛散性.

解：$\int_0^{\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{x^p}dx=\int_1^{\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{x^p}dx+\int_0^1\frac{\ln(x^2+1)}{x^p}dx$.　（1 分）

积分 $\int_1^{\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{x^p}dx$ 当 $p>1$ 时收敛，当 $0\le p\le 1$ 时发散;　（4 分）

积分 $\int_0^1\frac{\ln(x^2+1)}{x^p}dx$ 当 $p-2<1$ 时收敛，当 $p-2\ge 1$ 时发散。　（4 分）

所以，原积分当 $1<p<3$ 时收敛，当 $0\le p\le 1$ 和 $p\ge 3$ 时发散。　（1 分）

八、（10 分）直线 $\frac{x-4}{3}=\frac{y-3}{3}=\frac{z}{-1}$ 与直线 $\begin{cases}3x-y-3=0\\ y-3z+3=0\end{cases}$ 否在同一平面上？若是，求出它们所在的平面方程。若不是，求出与这两条直线相交且与它们都垂直的直线方程.

解：$\begin{cases}3x-y-3=0\\ y-3z+3=0\end{cases}$ 的点向式方程是 $x=\frac{y+3}{3}=z$，两条直线的方向向量分别是 $\vec{l}_1=(3,3,-1)$ 和 $\vec{l}_2=(1,3,1)$，$P_1(4,3,0)$ 和 $P_2(0,-3,0)$ 分别是两条直线上的点.

由于

$(\vec{l}_1\times\vec{l}_2)\cdot\overrightarrow{P_1P_2}=\begin{vmatrix}3 & 3 & -1\\ 1 & 3 & 1\\ 4 & 6 & 0\end{vmatrix}=12-6+12-18=0$，所以，两直线在同一平面上.（5 分）

所在平面方程的法向量是 $\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 3 & -1\\ 1 & 3 & 1\end{vmatrix}=6\vec{i}-4\vec{j}+6\vec{k}=(6,-4,+6)$，所以，平面方程是 $3x-2(y+3)+3z=0$，或

$$3x-2y-3z+6=0.\quad（5 分）$$

解 2: 作平面束 $3x-y-3+t(y-3z+3)=0$，先求此平面束中过点 $(4,3,0)$ 的平面. 将 $(4,3,0)$ 代入平面束方程解出 $t=-1$，即得平面方程 $3x-2y+3z-6=0$.（5 分）两条直线共面当且仅当直线 $\frac{x-4}{3}=\frac{y-3}{3}=\frac{z}{-1}$ 落在平面 $3x-2y+3z-6=0$ 上，当且仅当 $\vec{l}=(3,3,-1)\perp\vec{n}=(3,-2,3)$. 由于 $\vec{l}\cdot\vec{n}=0\Rightarrow\vec{l}\perp\vec{n}$，所以给定的二条直线在同一平面上，（5 分）该平面方程是 $3x-2y+3z-6=0$。

九、（10 分）设函数 f 在区间[A,B]连续（没有假定 f 可导），A < a < b < B，求 $\lim\limits_{h\to 0}\int_a^b \frac{f(x+h)-f(x)}{h}dx$.

解：$\lim\limits_{h\to 0}\int_a^b \frac{f(x+h)-f(x)}{h}dx = \lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\int_a^b f(x+h)dx - \int_a^b f(x)dx\right] = \lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\int_{a+h}^{b+h} f(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right]$（4 分）.

由于 f 连续，$\int_{a+h}^{b+h} f(x)dx$ 关于变量 h 可导，利用 l'Hospital 法则，得到

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\int_{a+h}^{b+h} f(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right] = \lim_{h\to 0}[f(b+h)-f(a+h)] = f(b)-f(a). \qquad \text{（4 分）}$$

因此：

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b \frac{f(x+h)-f(x)}{h}dx = f(b)-f(a). \qquad \text{（2 分）}$$

十、（10 分）设 f 在区间[0, 1]上连续，且 $\int_0^1 f(x)dx = 0$，$\int_0^1 xf(x)dx = 0$，$\int_0^1 x^2 f(x)dx = 1$，证明在[0, 1]上至少存在一点 ξ 使得 $|f(\xi)| \ge 12$.

证：$\int_0^1 (x-\frac{1}{2})^2 f(x)dx = \int_0^1 x^2 f(x)dx - \int_0^1 xf(x)dx + \frac{1}{4}\int_0^1 f(x)dx = 1$，（4 分）

反证：如果不存在 $\xi\in[0,1]$ 使得 $|f(\xi)| \ge 12$，则对任意 $x\in[0,1]$，$|f(x)|<12$（2 分）.

因此

$$\left|\int_0^1 (x-\frac{1}{2})^2 f(x)dx\right| \le \int_0^1 (x-\frac{1}{2})^2 |f(x)|dx < 12\int_0^1 (x-\frac{1}{2})^2 dx = 4(x-\frac{1}{2})^3\Big|_0^1 = 1.$$ 矛盾. （4 分）