复旦大学数学科学学院

2014～2015 学年第二学期期末考试试卷

《高等数学 B》（下）试题（答案）

1. （1）A;（2）C; （3）B; （4）D。

2. （1）$-\dfrac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2}$；（2）$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-1}{-1}$； （3）$\dfrac{11}{7}$；（4）$\dfrac{2}{3}(\sqrt{2}-1)$；

（5）$a>1$时绝对收敛； $a=1$时条件收敛； $0<a<1$时发散。

（6）$\dfrac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}\cos\dfrac{2n-1}{2}\pi x$；（7）$Ce^{-\frac{x^2}{2}}-x^2+2$。

3. $\left(\dfrac{21}{13},2,\dfrac{63}{26}\right)$。

4. $\dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{e}\right)$。

5. （1）$e^{x^2}+2x^2e^{x^2}$；（2）$2\sqrt{e}-1$。

6. （1）**解** 将题设方程化为

$$(x+1)f'(x)+(x+1)f(x)-\int_0^x f(t)dt=0，$$

对上式两边求导，得

$$(x+1)f''(x)+(x+2)f'(x)=0。$$

解此关于f'的方程便得

$$f'(x)=\frac{Ce^{-x}}{x+1}。$$

在已知的方程中令$x=0$得， $f'(0)=-f(0)=-1$，因此$C=-1$。于是

$$f'(x)=-\frac{e^{-x}}{x+1}。$$

（2）**证** 显然当$x\ge 0$时， $f'(x)<0$，因此f在$[0,+\infty)$上单调减少，于是

$$f(x)\le f(0)=1， \quad x\ge 0。$$

进一步，由 Newton-Leibniz 公式得，当$x\ge 0$时，

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)dt=1-\int_0^x\frac{e^{-t}}{t+1}dt\ge 1-\int_0^x e^{-t}dt=1+e^{-t}\Big|_0^x=e^{-x}.$$