复旦大学 2009 年数学竞赛分析卷

学　校：____________　　　　院　系：____________

姓　名：__________　学　号：________　专　业：________

1. 计算 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^2 \frac{x^n \ln x}{1+x^n}\,dx$, 并说明计算过程合理.

2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 对任何 $x\in(a,b)$, 极限
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}$$
存在且非负. 证明: $f(a)\le f(b)$.

3. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上某一点连续.

4. 设 $x_n, y_n \ge 0$ 满足
$$\begin{cases} x_n^{\frac{4n+5}{n}} + 3x_n + y_n = 1+\dfrac{1}{n}, \\ y_n^{\frac{n+2}{n}} + 4x_n + 3y_n = 4-\dfrac{1}{n}. \end{cases}$$
证明 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 收敛并求极限.

5. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续可导, 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\Big(f'(x)+f(x)\Big)=\ell$ 当且仅当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ 且 $f'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 一致连续.

6. 设 $a_1, a_2 > 0$, $a_{n+2}=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+1}}$. 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=\sqrt{2}$.

7. 设 n 为自然数. 证明:
$$\sum_{\substack{k+j=n\\0\le k,j\le n}} C_{2k}^{k} C_{2j}^{j} = 4^n.$$

8. 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数, $f(0)=f(1)$, a 是一个无理数, 证明

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\{ka\}) = \int_0^1 f(x)\,dx,$$

其中 $\{ka\}$ 表示 $\{ka\}$ 的小数部分.