复旦大学数学科学学院

2012～2013 学年第一学期期末考试试卷

□A 卷答案

课程名称：高等数学　　　　课程代码：MATH120005.04

开课院系：法医学、医学试验班、临床医学（八年制）考试形式：闭卷

姓　名：＿＿＿＿＿＿　　学　号：＿＿＿＿＿＿　　专　业：＿＿＿＿＿＿

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	总 分
得 分											

一、求下列极限：（$6'\times 3$）

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt[3]{x}\right)}{1+\cos\pi x}=\dfrac{1}{3\pi^2}$；

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\int_0^x t\cos t^2dt\right)^2}{\int_0^x \sin t^2dt}=0$；

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(\sin x)-\sin(\tan x)}{x^3}=0$。

二、已知 $y^2f(x)+xf(y)=x^2$，且 $f(x)$ 可导，求 $\dfrac{dy}{dx}$。（$6'$）

答案：$y'=\dfrac{2x-y^2f'(x)-f(y)}{2yf(x)+xf'(y)}$。

三、设 $f'(\tan x+1)=\cos^2 x+\sec^2 x$，且 $f(1)=4$，求 $f(x)$。（$6'$）

答案：$f(x)=\arctan(x-1)+x+\dfrac{1}{3}(x-1)^3+3$。

四、设 $y=\sin x\left(0\le x\le \frac{\pi}{2}\right)$， $y=a(0\le a\le 1)$ 与 $x=0$ 所围面积为 A_1， $y=\sin x\left(0\le x\le \frac{\pi}{2}\right)$，$y=a(0\le a\le 1)$ 与 $x=\frac{\pi}{2}$ 所围面积为 A_2，求 $A=A_1+A_2$ 的最小值。（$6'$）

答案：最小值为 $A\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}-1$。

五、求下列积分：（$6'\times 3$）

1. $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx=\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+c$；

2. $\int\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\csc\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\cot\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|+c$；

3. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\cos^3 x}{1+e^x}dx=\frac{2}{3}$。

六、已知 $f'(x)$ 存在， $f'(0)=a$，且对任何 x,y 恒有 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$，试求 $f(x)$。（$6'$）

答案： $f(x)=ax+x^2$。

七、讨论广义积分 $\int_1^{+\infty}x^{-\lambda}\ln^n x dx\ (\lambda>0,n\in N)$ 的敛散性。（$10'$）

答案：$0<\lambda\le 1$ 时发散；$\lambda>1$ 时收敛。

八、证明：假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的二阶导数，又 $f(a)=f(b)$，$f'(a)>0, f'(b)>0$，那么在 (a,b) 内，至少有一点 ξ，使得 $f''(\xi)=0$。（$10'$）

证：因为 $f(a)=f(b)$，由 Rolle 定理知，在 (a,b) 内至少有一点 ξ_1，使得 $f'(\xi_1)=0$。对 $f'(x)$ 分别在 $[a,\xi_1]$ 和 $[\xi_1,b]$ 上应用 Lagrange 中值定理，有

$$f''(\xi_2)=\frac{f'(\xi_1)-f'(a)}{\xi_1-a}=-\frac{f'(a)}{\xi_1-a}<0，\quad \xi_2\in(a,\xi_1)，$$

$$f''(\xi_3)=\frac{f'(b)-f'(\xi_1)}{b-\xi_1}=\frac{f'(b)}{b-\xi_1}>0，\quad \xi_3\in(\xi_1,b)，$$

由零点存在定理可知，$\xi\in(\xi_2,\xi_3)\subset(a,b)$，使得 $f''(\xi)=0$。

九、求行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & -n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -n & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -n & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -n & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$。（$10'$）

答案：$D_n=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(n+1)^{n-1}$。

十、设 $a=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$，$c=\begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix}$，$A=ab^T$，$B=b^Ta$，求解方程 $2B^2A^2X=A^4X+B^4X+c$。（$10'$）

答案：$X=c\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$。