

复旦大学数学科学学院  
2015~2016 学年第一学期期末考试试卷

A 卷

课程名称: 《高等数学 C (I)》 课程代码: MATH120005

开课院系: 数学科学学院 考试形式: 闭卷

姓名: \_\_\_\_\_ 学号: \_\_\_\_\_ 专业: \_\_\_\_\_

题号	1	2	3	4	5	6	7	总分
得分								

1. (本题满分 40 分, 每小题 5 分) 计算下列各题:

(1) 确定常数  $a$ , 使得函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x) - (x+ax^2)}{x^2}, & x \neq 0, \\ 2, & x = 0 \end{cases}$  在  $x=0$  点连续。

(2) 确定常数  $b$ , 使得直线  $y=9x+b$  为曲线  $y=x^3-3x$  的切线;

(装订线内不要答题)

(3) 求极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 3x + 1)}{\ln(x^3 + 2x + 1)}$ ;

(4) 求函数  $f(x) = (x+1)\ln(x+1)$  的单调区间和极值;

(5) 求不定积分  $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^4}} dx$ ;

(6) 设  $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & 1 < x, \end{cases}$  求  $\int_2^4 f(x-2)e^{-x} dx$ ;

(7) 问反常积分  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos^3 x}{(x+2e^{-3x})\sqrt{1+x}} dx$  是否收敛? 请说明理由;

(8) 求矩阵  $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -4 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}$  的逆矩阵。

2. (本题满分 10 分) 问方程  $2x^3 - 3x^2 + \frac{1}{2} = 0$  有几个实根? 请说明理由。

3. (本题满分 10 分) 要制作一个体积为  $V$  的圆柱形无盖铁桶, 问如何确定其底面半径和高才能用料最省?

4. (本题满分 10 分) 若  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^4 + 3} - [A + B(x-1) + C(x-1)^2]}{(x-1)^2} = 0$ , 求常数  $A, B, C$ 。

5. (本题满分 10 分) 证明: 当  $x > 0$  时成立

$$\ln(1+x) > x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4。$$

6. (本题满分 10 分) 设函数  $f$  在  $(-\infty, +\infty)$  上有连续二阶导数, 且满足方程

$$xf'(x) = f(x) + 140x^6.$$

(1) 求  $f(x)$  的表达式;

(2) 问曲线  $y = f(x)$  是否有拐点? 请说明理由。

(3) 是否存在函数  $f$ , 它在开区间  $(0, 1)$  上大于零, 并满足上面的方程, 且曲线  $y = f(x)$  ( $x \in [0, 1]$ ) 与直线  $x = 1$  和  $y = 0$  所围的图形  $D$  的面积为 2? 请说明理由。

7. (本题满分 10 分) 证明:  $\int_0^1 \left(1 + \sin \frac{\pi}{2} x\right)^n dx > \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$  ( $n = 1, 2, \dots$ );

(2) 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \int_0^1 \left(1 + \sin \frac{\pi}{2} x\right)^n dx \right]^{\frac{1}{n}}$ 。