复旦大学数学科学学院

2007～2008 学年第一学期期末考试试卷

□A 卷

课程名称：高等数学 C（上）　　课程代码：MATH120005.02

开课院系：数学科学学院　　考试形式：闭卷

姓　名：　　学　号：　　专　业：医学

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	总分
得分													

一、求极限（6′×3）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x^2}-1}{x\ln(1+5x)}$ $=-\dfrac{1}{5}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{|\sin n^2|}}{n}$ $=0$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(a+x)^x-a^x}{x^2}(a>0,a\neq 1)$ $=\dfrac{1}{a}$

二、（6′）设函数 $f(x)=\begin{cases}x+1 & x\le 0\\ x^x & x>0\end{cases}$，讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性，并求这个函数的单调区间和极值。

$f(0-0)=1=f(0+0)$ $\quad\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

$x<0$: $f'=1>0$ $\quad\therefore f\nearrow$

$x>0$: $f'=(x^x)'=x^x(\ln x+1)=0$ $\quad x=e^{-1}$

x	$(-\infty,0)$	$(0,e^{-1})$	$(e^{-1},+\infty)$
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

f 极大 $(0)=1$ $\quad$ f 极小 $(e^{-1})=e^{-e^{-1}}$

三、（6′）设 $f(0)=0$，$f'(0)$ 存在，求 $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}f(e^x)$。

$\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}f(e^x)$ $\quad$ 令 $e^x=t$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(e^x)}{e^x}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(t)}{t}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(t)-f(0)}{t-0}=f'(0)$

四、（6′）设函数 $f(x)$ 处处可导，且有 $f'(0)=1$，并对任何实数 x 和 h，恒有 $f(x+h)=f(x)+f(h)+2hx$，求 $f'(x)$。

$f'(x+h)=f'(h)+2x$ $\quad$ 令 $h=0$

$f'(x)=f'(0)+2x=1+2x$.

五、（6′）求曲线$\begin{cases} x = e^t \sin 2t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$在点$(0,1)$处的切线方程。

$$k = \frac{dy}{dx} = \frac{(e^t \cos t)'}{(e^t \sin 2t)'} = \frac{e^t \cos t - e^t \sin t}{e^t \sin 2t + 2e^t \cos 2t} = \frac{\cos t - \sin t}{\sin 2t + 2\cos 2t}$$

在点$(0,1)$处 $t=0$ $\therefore k = \frac{1}{2}$.

$$y - 1 = \frac{1}{2}x$$

六、（6′×3）求积分

1. $\int_{-1}^{1}\left(\frac{x\cos x}{x^4+2}+1\right)dx$ $= \int_{-1}^{1} \frac{x\cos x}{x^4+2}dx + \int_{-1}^{1} dx = 0 + x\Big|_{-1}^{1} = 2$

2. $\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^2}dx$ $= \int_0^{+\infty} \frac{(1+x^2)-x^2}{(1+x^2)^2}dx = \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{x}{(1+x^2)^2}d(1+x^2)$

$$= \arctan x\Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x \, d\frac{1}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x^2}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\left(0 - \arctan x\Big|_0^{+\infty}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

3. $\int \frac{x\,dx}{1+\sin x} = \int \frac{x(1-\sin x)}{\cos^2 x}dx = \int x\cdot \sec^2 x\,dx - \int \frac{x\cdot\sin x}{\cos^2 x}dx$

$= \int x\,d\tan x + \int \frac{x}{\cos^2 x}\,d\cos x = x\tan x - \int \tan x\,dx - \int x\,d\frac{1}{\cos x}$

$= x\tan x + \ln|\cos x| - \int x\,d\sec x$

$= x\tan x + \ln|\cos x| - x\sec x + \int \sec x\,dx$

$= x\tan x + \ln|\cos x| - x\sec x + \ln|\sec x + \tan x| + C$

七、(6′) 已知 $f(x)=\int_1^x \frac{\ln t}{1+t}dt$，求 $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$。

$f(\frac{1}{x}) = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\ln t}{1+t}dt$ 令 $u=\frac{1}{t}$

$= \int_1^x \frac{-\ln u}{1+\frac{1}{u}}\left(-\frac{1}{u^2}\right)du = \int_1^x \frac{\ln u}{u(u+1)}du = \int_1^x \frac{\ln t}{t(t+1)}dt$

$f(x)+f(\frac{1}{x}) = \int_1^x \left[\frac{\ln t}{1+t} + \frac{\ln t}{t(1+t)}\right]dt = \int_1^x \frac{\ln t}{t}dt = \int_1^x \ln t\,d\ln t$

$= \frac{1}{2}(\ln t)^2\Big|_1^x = \frac{1}{2}(\ln x)^2$

八、(6′) 设函数 $f(x)=\int_1^x e^{-t^2}dt$，求 $\int_0^1 xf(x^2)dx$。

$\int_0^1 xf(x^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 f(x^2)\,dx^2 = \frac{1}{2}\left(x^2 f(x^2)\Big|_0^1 - \int_0^1 x^2\,d f(x^2)\right)$

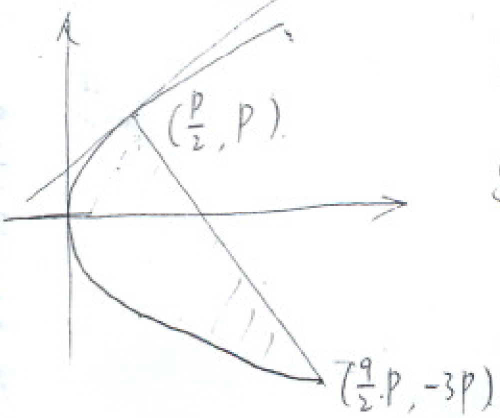
$= -\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\left(f(x^2)\right)'dx$

$f(x^2) = \int_1^{x^2} e^{-t^2}dt.$ $\quad (f(x^2))' = e^{-x^4}\cdot 2x.$

$\therefore$ 原 $= -\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\cdot e^{-x^4}\cdot 2x\,dx = -\int_0^1 x^3 e^{-x^4}dx$

$= \frac{1}{4}\int_0^1 e^{-x^4}d(-x^4) = \frac{1}{4}e^{-x^4}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}(e^{-1}-1)$

九、（6′）求抛物线 $y^2 = 2px(p>0)$ 及其在点 $\left(\dfrac{p}{2}, p\right)$ 处的法线所围区域的面积。



法线方程 $y = \frac{3}{2}p - x$.

$$S = \int_{-3p}^{p} \left(\frac{3}{2}p - y - \frac{y^2}{2p}\right) dy = \frac{16}{3}p^2$$

十、（6′）设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$I$ 为 3 阶单位阵，$A^{-1}(BX + I) = 2X$，求 X。

$X = (2A - B)^{-1}$

$$2A - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$|2A - B| = 1.$

$$\therefore X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

十一、（8′）设α_1，α_2，β_1，β_2均为三维列向量，$A=(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1)$，$B=(\alpha_1,\alpha_2,\beta_2)$，行列式$|A|=2$，$|B|=1$，求行列式$|2A-5B|$。

$2A-5B=(-3\alpha_1 \quad -3\alpha_2 \quad 2\beta_1-5\beta_2)$

$|2A-5B|=9|\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad 2\beta_1-5\beta_2|=9(|\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad 2\beta_1|-|\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad 5\beta_2|)$

$=9(2|\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \beta_1|-5|\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \beta_2|)$

$=9(2|A|-5|B|)=9(2\times2-5\times1)=-9$

十二、（8′）问a、b取何值时，方程组$\begin{cases}x+y-z=1\\2x+(a+2)y-(b+2)z=3\\-3ay+(a+2b)z=-3\end{cases}$分别有唯一解、无穷多解和无解？

1° 当 $a\neq b$ 且 $a\neq0$ 时　有唯一解

2° 当 $a=b\neq0$ 时　有无穷多个解

3° 当 $a=0$ 时　无解.