复旦大学数学科学学院

2011～2012 学年第一学期期末考试试卷

□A 卷

课程名称：高等数学 C（上）　课程代码：MATH120005

开课院系：数学科学学院　考试形式：闭卷

姓　名：　　学　号：　　专　业：医学试验班、八年制临床医学

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

一、填充题（$3'\times 5$）

1．设 $\dfrac{\sin x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则为 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x f'(x)dx=$______________。

答案：$\boldsymbol{\dfrac{4}{\pi}-1}$

2．设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x + xf(x)}{x^3}=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}=$______________。

答案：**36**

3．$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&2&0&0&0\\0&0&2&1&0\\0&0&3&2&0\\0&0&0&0&3\end{pmatrix}$，则 $\left(A^*\right)^{-1}=$______________。

答案：$\boldsymbol{\begin{bmatrix}\frac{1}{6}&0&0&0&0\\0&\frac{1}{3}&0&0&0\\0&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{6}&0\\0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}&0\\0&0&0&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n}=$______________ 。

答案：3

5. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x-\cos x}{1+\sin^2 x}dx=$__________________ 。

答案：$-\frac{\pi}{2}$

二、单选题（$3'\times 5$）

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ 是 $f(x)$ 在 x_0 的某空心邻域内无界的（　　）条件。

A．充分　B. 必要　C. 充分必要　D. 无关

答案：A

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{f(3x)}=$（　　）。

A．$3/2$　B. $2/3$　C. $1/3$　D. $4/3$

答案：C

3．设 A 为齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+tx_2+x_3=0\\ x_1+x_2+tx_3=0\end{cases}$ 的系数矩阵，若有三阶方阵 $B\neq 0$，且 $AB=0$，则（　）。

A. $t=-2,$ 且 $|\mathrm{B}|=0$　B. $t=-2,$ 且 $|\mathrm{B}|\neq 0$　C. $t=1,$ 且 $|\mathrm{B}|=0$　D. $t=1,$ 且 $|\mathrm{B}|\neq 0$

答案：C

4．下列积分中可直接用 Newton-Leibniz 公式计算积分的是（　　）。

A．$\int_0^6\frac{x^3}{1+x^2}dx$　B. $\int_{-1}^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$　C. $\int_0^6\frac{x}{(x^2-6)^2}dx$　D. $\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{1}{x\ln x}dx$

答案：A

5．$\forall x$，有 $f(-x)=-f(x)$，且 $f'(-x_0)=-k\neq 0$，则 $f'(x_0)=$（　　）。

A. $1/k$ B. $-1/k$ C. $-k$ D. k

答案：C

三、计算题($6'\times 8$)

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\left(\sqrt{1+t^2}-\sqrt{1-t^2}\right)dt}{x^2\sin x}$

答案：$\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

2. $\displaystyle\int\frac{\cos^2 x-\sin x}{\cos x\left(1+\cos xe^{\sin x}\right)}dx$

答案：$\boldsymbol{\ln\left|\dfrac{\cos x}{1+e^{\sin x}\cos x}\right|+C}$

3. 设 $y=f(x)$由方程 $xy^2+\sin x^3=y\cdot 3^x$ 确定，求 dy 。

答案：$\boldsymbol{\dfrac{3^x y\ln 3-y^2-3x^2\cos x^3}{2xy-3^x}dx}$

4. $y=\arctan\left(3e^x\right)$，求 $\dfrac{dy}{d\sin x}$ 。

答案：$\boldsymbol{\dfrac{3e^x}{(1+9e^{2x})\cos x}}$

5. 设 $f(x)=\begin{cases}1, x<0\\ x+1, 0\le x\le 1\\ 2x, x>1\end{cases}$，求 $\int f(x)dx$ 。

答案：$\boldsymbol{\int f(x)dx=\begin{cases}x+C & x<0\\ \dfrac{1}{2}x^2+x+C & 0\le x<1\\ x^2+\dfrac{1}{2}+C & x>1\end{cases}}$

6. $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1-2x}{1+2x}}dx$

答案：$\boldsymbol{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}}$

7. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}$

答案：$\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$

8. $A=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$，求$|A|$。

答案：$\boldsymbol{(a^2+b^2+c^2+d^2)^2}$

四、证明题（$5'\times 2$）

1．设$f(x)$在$[0,1]$区间上有一阶连续导数，且$f(1)-f(0)=1$，证明：$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx \geq 1$。

证明：$\boldsymbol{\because [f'(x)-1]^2 \geq 0}$，即 $\boldsymbol{[f'(x)]^2 \geq 2f'(x)-1}$

$\boldsymbol{\therefore \int_0^1 [f'(x)]^2 dx \geq \int_0^1 [2f'(x)-1]dx = 2[f(1)-f(0)]-1=1}$，即证。

2．设$f'(x)$在$[a,b]$上存在，且$f'(a)<f'(b)$，r为$f'(a)$、$f'(b)$之间的任意一个数值，则在(a,b)内存在一点ξ，使得$f'(\xi)=r$。

证明：设 $\boldsymbol{F(x)=f(x)-rx}$，由已知 $\boldsymbol{F(x)}$在$[a,b]$ 上有最小值，设为 $\boldsymbol{F(\xi)}$，

$\boldsymbol{F'(x)= f(x)-}$ ，$\boldsymbol{\because f'(a)<r<f'(b)}$，$\boldsymbol{\therefore F'(a)<0}$，$\boldsymbol{F'(b)>0}$.

又 $\boldsymbol{F(x)=F(a)+F'(a)(x-a)+o(x-a)}$

当 $\boldsymbol{x\in(a,a+\varepsilon)}$时，对充分小的正数 $\boldsymbol{\varepsilon}$，$\boldsymbol{F(\xi)\leq F(x)<F(a)}$，$\boldsymbol{\therefore \xi \neq a}$；

同理可证：$\boldsymbol{\xi \neq b}$，$\boldsymbol{\therefore \xi \in (a,b)}$.

又 $\boldsymbol{F(x)}$在$\boldsymbol{\xi}$可导，且$\boldsymbol{F(\xi)}$为 最值，由 **Fermat** 定理，$\boldsymbol{F'(\xi)=0}$，即证。

五、综合题$(12')$

1．设点 P 位椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 上一点，F_1，F_2 为椭圆的两个焦点，求 $|PF_1|\cdot|PF_2|$ 的最大值。$(5')$

答案：$\boldsymbol{Z_{\max}=25}$

2．设 $\begin{cases} kx_1+x_2+x_3=5 \\ 3x_1+2x_2+kx_3=18-5k \\ x_2+2x_3=2 \end{cases}$，问 k 取何值，方程组无解，有唯一解，有无穷解？在有无穷解时，求出全部解。$(7')$

答案：1）当 $\boldsymbol{k\neq 3}$ 且 $\boldsymbol{k\neq 1}$ 时，有唯一解；

2）当 $\boldsymbol{k=3}$ 时，无解；

3）当 $\boldsymbol{k=1}$ 时，有无穷多组解，其通解为 $\boldsymbol{x=\lambda\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}}\quad \boldsymbol{\lambda\in R}$.