

# 复旦大学数学科学学院

## 2009~2010 学年第二学期期末考试试卷

### A 卷

课程名称: \_\_\_\_\_ 课程代码: \_\_\_\_\_

开课院系: \_\_\_\_\_ 考试形式: 闭卷

姓 名: \_\_\_\_\_ 学 号: \_\_\_\_\_ 专 业: \_\_\_\_\_

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
得 分	15	8	8	8	8	6	8	8	10
题 号	10	11	总 分						
得 分	10	11	100						

一、求极限 (15 分):

1、  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy^2)}{x^2 + y^2}$ ;

2、  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} \int_0^t dx \int_x^t e^{-(y-x)^2} dy$ ;

3、  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4}{4^n}$ 。

二、(8 分) 设  $z = f(x, y)$  是由方程  $F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0$  所确定的隐函数,  $F(x, y)$  具有连续偏导数, 求  $dz$ 。

三、(8 分) 求椭圆  $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$  的内接等腰三角形, 其底边平行于椭圆的长轴, 且使面积最大。

四、(8 分) 计算  $I = \iint_D \frac{x}{(1+x^2+y^2)^2} dx dy$ , 其中  $D$  由  $y = \frac{x^2}{2}$ ,  $x \geq 0$  及  $y = 1$  所围。

五、(8 分) 试证:  $[\int_m^n f(x) dx]^2 \leq (n-m) \int_m^n f^2(x) dx$  ( $m, n$  均为常数)。

六、(6 分) 判别级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{a^n + n^2}$  的敛散性 ( $a > 0$ )。

七、(8 分) 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)} x^n$  的和函数, 并计算数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{(n+1) 2^n}$  的和。

八、(8分) 设函数  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上连续, 并满足

$$f(t) = 2 \iint_{x^2+y^2 \leq t^2} (x^2+y^2)f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy + t^4,$$

求  $f(t)$ 。

九、(10分) 设函数  $y = f(x)$  满足微分方程  $y'' + y - \sin x = 0$ , 其图形在点  $(0,1)$  处

的切线与曲线  $y = x^2 - x + 1$  在该点处的切线重合, 求函数  $f(x)$  的解析表达式。

十、(10分) 用 X 光透视诊断肺结核, 患者被诊断为肺结核的概率为 0.95, 非患者被诊断为肺结核的概率为 0.02. 某地肺结核发病率为 0.001, 求:

- (1) 任意一人被诊断为肺结核的概率;
- (2) 若某人经首次透视被诊断为肺结核, 他确为该病患者的概率;
- (3) 根据 (2) 的计算试判断该患者是否已患肺结核, 说明理由。

十一、(11分) 已知某型号 LED 灯的使用寿命  $X$  为连续型随机变量, 其密度函数为

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{C}{x^2} & x > 4000 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

- (1) 求常数  $C$ ;
- (2) 计算  $P(X \leq 4800 | 4500 < X < 5000)$ ;
- (3) 已知一设备装有 3 个这样的 LED 灯, 每个 LED 灯能否正常工作相互独立, 求在使用的最初 4500 天只有一个损坏的概率。