复旦大学数学科学学院系

2009 ～2010 学年第一学期期末考试试卷

A 卷

课程名称：高等数学 C　　课程代码：MATH120005.03

开课院系：数学科学学院　　考试形式：闭卷

姓　名：________　学　号：________　专　业：________

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	总分
得 分									

一、　计算下列各题：（6×5 分）

1、$\lim\limits_{x\to 0}\left(3e^{\frac{x}{x-1}}-2\right)^{\frac{1}{x}}$；

2、$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{e^{\frac{2\pi}{n}}}{n}+\cdots+\frac{e^{\frac{n-1}{n}2\pi}}{n}\right)$；

3、设 $f''(x)$ 存在，求 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}$；

4、已知 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{f(x)\sin x+1}-1}{e^{4x}-1}=2$ ，求 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$；

5、设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=1+2t^2 \\ y=\int_0^{1+2\ln t}\frac{e^u}{u}du \end{cases}$ $(t>1)$ 所确定，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 。

二、设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 区间上可导，且满足 $f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)dx$ 。（8 分）

三、求积分：（3×6 分）

1、$\int \max\{|x-1|,1\}dx$；

2、$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{1+e^x} dx$；

3、$\int_{1}^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2} dx$。

四、设 $\int_0^{\pi} [f(x)+f''(x)]\sin x dx = 3$， $f(\pi)=2$，求 $f(0)$。（8 分）

五、设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 区间上连续，在 $(0,1)$ 区间上大于零，并满足 $xf'(x)-f(x)=\frac{3a}{2}x^2$ （a 为常数），且假设 $y=f(x)$ 与 $x=1, y=0$ 所围成的图形 S 的面积为 2 。

求（1） $f(x)$ （2）当 a 为何值时，图形 S 绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积最小？其最小体积为多少？（12 分）

六、设 $\boldsymbol{a,b,c}$ 是方程 $\boldsymbol{x^3-2x+4=0}$ 的三个根，求 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \end{vmatrix}$ 的值。（8 分）

七、已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$。若 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{AX+2B=BA+2X}$，求

$\boldsymbol{X}^3$。（6 分）

八、设有线性方程组 $\begin{cases} x_1 + a_1 x_2 + a_1^2 x_3 = a_1^3 \\ x_1 + a_2 x_2 + a_2^2 x_3 = a_2^3 \\ x_1 + a_3 x_2 + a_3^2 x_3 = a_3^3 \\ x_1 + a_4 x_2 + a_4^2 x_3 = a_4^3 \end{cases}$

1）证明：若 a_1, a_2, a_3, a_4 两两不相等，则此线性方程组无解；

2）设 $a_1 = a_3 = k$，$a_2 = a_4 = -k \quad (k \neq 0)$，且已知 β_1, β_2 是线性方程组的两个解，其中 $\beta_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，$\beta_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ 写出此线性方程组的通解。（10 分）