复旦大学数学科学学院

2005～2006 学年第二学期期末考试试卷

A 卷

课程名称：高等数学 C　　课程代码：218.103.2

开课院系：数学科学学院　　考试形式：闭卷

姓　名：________　　学　号：________　　专　业：医学

题　号	1	2	3	4	5	6	7	8	总　分
得　分									
题　号	9	10	11	12	13	14	15	16	
得　分									

（装订线内不要答题）

一.　　求极限 （2*7%）

1. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}(x^n+y^n)e^{-(x+y)}$　　　　2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n n!}{n^n}$

解答：　$=0$　　　　$=0$

二.　　设 $f(x,y,z)=\dfrac{x\cos y+y\cos z+z\cos x}{1+\cos x+\cos y+\cos z}$ 　求 $df(0,0,0)$ （8%）

解答：　$df(0,0,0)=\dfrac{1}{4}(dx+dy+dz)$

三.　　设 $u=f(x,y,z)$ 有连续的一阶偏导数，又 $e^{xy}-xy=2$，$e^x=\int_0^{x-z}\dfrac{\sin t}{t}dt$

求：$\dfrac{du}{dx}$ 　（8%）

解答：$\dfrac{du}{dx}=f_x'-\dfrac{y}{x}f_y'+\left[1-\dfrac{e^x(x-z)}{\sin(x-z)}\right]f_z'$

四.　　平面上两定点 $A(1,3)$，$B(4,2)$，试在椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1\quad(x>0,\ y>0)$ 的圆

（装订线内不要答

周上求一点 C ，使 ΔABC 面积 S_{Δ} 最小。（提示：$S_{\Delta}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$ ）（8%）

解答： 当 $C(\frac{3}{\sqrt{5}},\frac{4}{\sqrt{5}})$ 时，使 ΔABC 面积 S_{Δ} 最小。

五. 计算 $I=\iint\limits_{D}\left|y-x^2\right|d\sigma$ 其中 $D=\{-1\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$ （8%）

解答： $I=\iint\limits_{D}\left|y-x^2\right|d\sigma=\frac{11}{15}$

六. 设一元函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明

$$\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}}(x-y)^{n-2}f(x)dx=\frac{1}{n-1}\int_0^1(x-x^2)^{n-1}f(x)dx \qquad (8\%)$$

证明：$\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}}(x-y)^{n-2}f(x)dx=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x}(x-y^2)^{n-2}f(x)dy$

$$=\int_0^1 f(x)\left(\left.\frac{-(x-y)^{n-1}}{n-1}\right|_{x^2}^{x}\right)dx=\text{右式}$$

七. 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{3n}}$ $x>0$ 的敛散性。（8%）

解答：$\because \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{x^n}{1+x^{3n}}}=\frac{x}{\max(1,x^3)}<1$ $(x\ne 1)$ 收敛（$Cauchy$ 判别法）

当 $x=1$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}$ 发散

八. 将函数 $f(x)=\arctan\frac{1-2x}{1+2x}$ 展开成 x 的幂级数，并求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和。（8%）

解答： $f(x)=\arctan\frac{1-2x}{1+2x}=\frac{\pi}{4}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{2n+1}x^{2n+1}$ $\quad x\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$$

九. 若常微分方程 $y''+ay'+by=\beta e^x$ 有一个特解为 $y=e^{2x}+(1+x)e^x$ ，试确定

常数 a, b 与 β 的取值，并求出该微分方程的通解。（8%）

解答：$\begin{cases} a=-3 \\ b=2 \\ \beta=-1 \end{cases}$ $\quad GS.\quad y=C_1e^x+C_2e^{2x}+xe^x$

十． 设函数 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上具有连续导数，且满足

$$f(t)=e^{\pi t^2}+\iint_{x^2+y^2\le t^2} f(\sqrt{x^2+y^2})d\sigma$$ 求 $f(t)$ （8%）

解答：$f(t)=e^{\pi t^2}(\pi t^2+1)$

十一． 一台电子设备内装有 3 个某种类型的电子管。已知这种电子管的寿命 ξ（单位：小时）服从如下的指数分布：

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{1000}e^{-\frac{x}{1000}} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$$

如果有一个电子管损坏（即此电子管寿命小于电子管的平均寿命 1000 小时），设备仍能正常工作的概率为 0.80，若两个及两个以上电子管损坏，则设备不能正常工作。（各电子管工作相互独立，$e^{-1}\approx 0.37$）。

求：（1）电子管损坏的概率。

（2）求这台电子设备在正常工作 1000 小时后仍能正常工作的概率。（2*7%）

解答：ξ：“电子管的寿命”，

η：“3 个电子管使用 1000 小时后损坏的个数，$\eta \sim B(3, p)$ 其中

$p=P\{\xi<1000\}$

A：“这台电子设备在正常工作 1000 小时后仍能正常工作”

（1）电子管损坏的概率 $p=P\{\xi<1000\}=\int_0^{1000}\frac{1}{1000}e^{-\frac{x}{1000}}dx\approx 0.63$

（2）$P(A)=P\{\eta=0\}P\{A|\eta=0\}+P\{\eta=1\}P\{A|\eta=1\}$

$=C_3^0(0.63)^0(0.37)^3\cdot 1+C_3^1(0.63)^1(0.37)^2\cdot 0.80$

$=0.258$