2017～2018 学年第一学期期末考试 A 卷答案

一、1.B；2.A；3.C；4. C

二、1. $-\frac{\pi}{2}\ln 2$ （变量代换：先 $x=2t$，后 $u=\frac{\pi}{2}-t$）

2. $\ln\frac{3+2\sqrt{2}}{2}-1$

（变量代换 $y=\frac{1}{x}$ 后，再分部积分。$\left[\ln\left(1+\sqrt{1+y^2}\right)\right]'=\frac{y}{\sqrt{1+y^2}\left(1+\sqrt{1+y^2}\right)}$）

3. $A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \\ -4 & -5 & 0 \end{pmatrix}$

4. 0。（$\lim\limits_{x\to 0}\ln\left[f(x)+2\right]=\ln\left[f(0)+2\right]=0$，得 $f(0)=-1$，$\ln\left[f(x)+2\right]\sim 1+f(x)\left(当 x\to 0\right)$

由原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+f(x)}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1+f(x)}{x}}{1-\frac{\sin x}{x}}=1$，得 0$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$）

三、1. -2

2. $\frac{1}{12}$

3. $2^{\frac{n}{2}}e^x\cos\left(\frac{n\pi}{4}+x\right)$ （$y'=e^x(\cos x-\sin x)=\sqrt{2}e^x\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$，由归纳法得）

4. $-edx$

5. $\frac{2}{27}x^{\frac{3}{2}}\left(9\ln^2 x-12\ln x+8\right)+C$

6. $\frac{2}{3}\sqrt{3}$

7.齐次方程基础解系有一个向量组成 $2\alpha-(\beta+\gamma)$，通解为 $C\left[2\alpha-(\beta+\gamma)\right]+\alpha$。

8. $A_1=at+\cos t-1=t\sin t+\cos t-1$， $A_2=\cos t-\frac{\pi}{2}a+at=\cos t-\frac{\pi}{2}\sin t+t\sin t$，

$A=2t\sin t+2\cos t-\frac{\pi}{2}\sin t-1$， $A'=\left(2t-\frac{\pi}{2}\right)\cos t$， $t=\frac{\pi}{4}$， $a=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$时， A最小值为$\sqrt{2}-1$。

四、1. $\lim\limits_{x\to0+}F(x)=0$，则$F(x)$在$[0,+\infty)$上连续。对$x>0$，$\int_0^x t^n f(t)dt=\xi^n f(\xi)$，$\xi\in(0,x)$。由 $f(x)$单调增加， $f(x)\ge f(\xi)$； 由$n>0$， $x^n>\xi^n$， 则$x^n f(x)>\xi^n f(\xi)$。

$F'(x)=\frac{x^{n+1}f(x)-x\xi^n f(\xi)}{x^2}\ge0$， 则$F(x)$在$[0,+\infty)$上单调增加。

2. 设 $x_0\in(0,1)$ ， $f(x_0)=\frac{1}{4}$ ， 则 $f'(x_0)=0$ 。 $f(x)$ 在 x_0 的 Taylor 展 开 为 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2$ $(\xi在x与x_0间)$ 。

$f(0)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}f''(\xi)x_0^2$ $(\xi\in(0,x_0))$， $f(1)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}f''(\eta)(1-x_0)^2$ $(\eta\in(x_0,1))$。由$|f''(x)|\le1$，

$$|f(0)|+|f(1)|\le\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left[x_0^2+(1-x_0)^2\right]\le\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times1=1\ (x_0\in(0,1))。$$