复旦大学数学科学学院

2015～2016 学年第一学期期末考试试卷

《高等数学 C（I）》试题答案

（装订线内不要答题）

1．（本题满分 40 分，每小题 5 分）（1）$a=-\dfrac{5}{2}$；（2）± 16；（3）$\dfrac{2}{3}$；

（4）在 $(-1,\mathrm{e}^{-1}-1]$ 上单调减少，在 $[\mathrm{e}^{-1}-1,+\infty)$ 上单调增加；$f(\mathrm{e}^{-1}-1)=-\mathrm{e}^{-1}$ 为极小值；

（5）$\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{x^2}{2}+C$；（6）$\mathrm{e}^{-2}\left(1-\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^2$；（7）收敛；（8）$\begin{pmatrix}14 & 8 & 3\\ 8 & 5 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$。

2．（本题满分 10 分）3 个。

3．（本题满分 10 分）底面半径和高均为 $\sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}}$。

4．（本题满分 10 分）$A=2$，$B=1$，$C=\dfrac{5}{4}$。

5．（本题满分 10 分）**证：** 作函数

$$f(x)=\ln(1+x)-\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\right),\quad x>-1,$$

则当 $x\in(-1,+\infty)$ 时，

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{1}{1+x}-1+x-x^2+x^3\\&=\frac{1}{1+x}-(1-x)(1+x^2)=\frac{1-(1-x^2)(1+x^2)}{1+x}\\&=\frac{x^4}{1+x}>0.\end{aligned}$$

这说明函数 f 在 $[0,+\infty)$ 上严格单调增加，从而当 $x>0$ 时，

$$f(x)>f(0)=0,$$

即

$$\ln(1+x)>x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4。$$

6．（本题满分 10 分）（1）$f(x)=28x^6+cx$（c 为任意常数）；（2）无拐点；（3）不存在。

7.（本题满分 10 分）（1）证；由 $\sin x \ge \frac{2}{\pi}x$（$0 \le x \le \frac{\pi}{2}$）知 $\sin\frac{\pi}{2}x \ge x$（$0 \le x \le 1$），

所以

$$\int_0^1\left(1+\sin\frac{\pi}{2}x\right)^n \mathrm{d}x \ge \int_0^1(1+x)^n \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1}\Big|_0^1 = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}。$$

（2）由于

$$\frac{2^n}{n+1} < \frac{2^{n+1}-1}{n+1} \le \int_0^1\left(1+\sin\frac{\pi}{2}x\right)^n \mathrm{d}x \le \int_0^1(1+1)^n \mathrm{d}x = 2^n，$$

利用极限的夹逼性可得

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int_0^1\left(1+\sin\frac{\pi}{2}x\right)^n \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{n}} = 2。$$