

# 复旦大学数学科学学院

## 2013~2014 学年第一学期期末考试试卷

### A 卷

课程名称: 高等数学 C (上) 课程代码: MATH120005

开课院系: 数学科学学院 考试形式: 闭卷

姓名: \_\_\_\_\_ 学号: \_\_\_\_\_ 专业: \_\_\_\_\_

题号	1	2	3	4	5	6	总分
得分							

1. (本题满分 48 分, 每小题 6 分) 计算下列各题:

(1) 设  $y = \cos(\ln x)$ , 求  $y''$ ;

(2) 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ ;

(装订线内不要答题)

(3) 求函数  $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$  的单调区间和极值;

(4) 求曲线  $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$  的拐点;

(5) 求不定积分  $\int e^x \cos(2e^x) dx$ ;

(6) 计算反常积分  $\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx$ ;

(7) 问矩阵  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  是否可逆? 若可逆, 求其逆矩阵;

(8) 设  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 若 3 阶方阵  $\mathbf{B}$  满足  $\mathbf{AB} + \mathbf{I}_3 = \mathbf{A}^2 + \mathbf{B}$ , 求  $\mathbf{B}$ 。

2. (本题满分 10 分) 设  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0, 1), \\ 2x, & x \in [1, 2]. \end{cases}$  求  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$  在  $[0, 2]$  上的表达式, 并讨论  $F(x)$  在  $x=1$  点的可导性。

3. (本题满分 12 分) 已知抛物线  $L: y = -x^2 + 4x - 3$ 。

(1) 求  $L$  分别在点  $(0, -3)$  和  $(3, 0)$  处的切线的方程;

(2) 求 (1) 中的两条切线与  $L$  所围图形的面积。

4. (本题满分 10 分) 讨论方程  $x \ln x = a$  有几个实根。

5. (本题满分 10 分) 已知在  $(-\infty, +\infty)$  上具有二阶连续导数的函数  $f(x)$  满足方程

$$x^2 f''(x) - 2(x \sin x) f'(x) = e^x + e^{-x} - 2,$$

若  $f(x)$  在  $x = a$  处取极值, 问  $f(a)$  是函数  $f(x)$  的极大值还是极小值? 请说明理由。

6. (本题满分 10 分) (1) 求  $\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\cos^2 x} dx$  和  $\int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x} dx$ ;

(2) 证明  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x \frac{\sin^2 t}{1+\cos^2 t} dt}{\int_0^x \frac{1}{1+\cos^2 t} dt} = 2 - \sqrt{2}$ 。