

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\sin x) - \sin(\tan x)}{x^3}$

二、已知 $y^2 f(x) + x f(y) = x^2$ ，且 $f(x)$ 可导，求 $\frac{dy}{dx}$ 。(6')

三、设 $f'(\tan x + 1) = \cos^2 x + \sec^2 x$ ，且 $f(1) = 4$ ，求 $f(x)$ 。(6')

四、设 $y = \sin x \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$, $y = a (0 \leq a \leq 1)$ 与 $x = 0$ 所围面积为 A_1 , $y = \sin x \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$,

$y = a (0 \leq a \leq 1)$ 与 $x = \frac{\pi}{2}$ 所围面积为 A_2 , 求 $A = A_1 + A_2$ 的最小值。(6')

五、求下列积分:(6'×3)

1. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$

$$2. \int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} dx$$

$$3. \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{1 + e^x} dx$$

六、已知 $f'(x)$ 存在, $f'(0) = a$, 且对任何 x, y 恒有 $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$, 试求 $f(x)$ 。(6')

七、讨论广义积分 $\int_1^{+\infty} x^{-\lambda} \ln^n x dx$ ($\lambda > 0, n \in N$) 的敛散性。(10')

八、证明：假设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有连续的二阶导数，又 $f(a) = f(b)$ ， $f'(a) > 0, f'(b) > 0$ ，那么在 (a, b) 内，至少有一点 ξ ，使得 $f''(\xi) = 0$ 。(10')

九、求行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & -n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -n & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -n & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -n & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 。(10')

十、设 $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$, $A = ab^T$, $B = b^T a$, 求解方程 $2B^2 A^2 X = A^4 X + B^4 X + c$ 。

(10')