二次型练习题

§1　二次型及其标准形式

1．用正交变换将下列二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

化为标准形，并写出所用的变换。

2．利用配方法和初等变换法二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

化为标准形，并写出所用的变换。

3．若二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + tx_3^2 + 6x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$$

的秩为 2，求 t。

4．已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ 经正交变换可化为标准形 $f = 6y_1^2$，求 a。

5．已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = ax_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 2bx_1x_3$（$b>0$），其中二次型的相伴矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值之和为 1，特征值之积为 -12。

（1）求参数 a，b；

（2）利用正交变换将 f 化为标准形，并写出所用的变换。

6．已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = ax_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3$ 经正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 化为标准形 $f = y_1^2 + ay_2^2 + by_3^2$，求 a，b。

（1）求参数 a，b；

（2）求所用的正交变换。

7．求二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2 + ax_2^2 + ax_3^2 + 6x_2x_3$（$a>3$）的规范形。

8. 已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + tx_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$ 的正惯性指数为 3，求参数 t 的取值范围。

9. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + ax_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2bx_2x_3$ 的相伴矩阵为 $\boldsymbol{A}$，且已知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 -5，6，6。

（1）求 a，b 的值；

（2）说明方程 $f(x_1,x_2,x_3) = 1$ 表示何种二次曲面。

10．已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵，且有特征值

$\lambda_1=2$，$\lambda_2=3$，$\lambda_3=0$。若 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=3$ 的特征向量分别为 $\boldsymbol{a}_1=(1,1,0)^T$ 和 $\boldsymbol{a}_2=(1,-1,1)^T$，求此二次型的表达式。

11．设 $\boldsymbol{A}$ 是奇数阶实对称矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|>0$。证明：存在向量 $\boldsymbol{x}_0$，使得 $\boldsymbol{x}_0^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0>0$。

12．设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是实二次型。证明：若存在向量 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2\in\mathbf{R}^n$，使得 $f(\boldsymbol{x}_1)=\boldsymbol{x}_1^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1>0$，$f(\boldsymbol{x}_2)=\boldsymbol{x}_2^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2<0$，则存在 $\boldsymbol{x}_3\neq\boldsymbol{0}\in\mathbf{R}^n$，使得 $f(\boldsymbol{x}_3)=\boldsymbol{x}_3^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_3=0$。

13．设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵。证明：二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 在条件 $\|\boldsymbol{x}\|=1$ 下的最大值不超过 $\boldsymbol{A}$ 的最大特征值。

14．证明实二次型的秩 r 与符号差 $p-q$ 同是奇数或偶数，并且成立 $|p-q|\le r$。

15．已知 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵，且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$，证明 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$。

16．设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 是 n 阶非零矩阵。已知 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，$(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{C}=\boldsymbol{O}$，且 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{B})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{C})=n$，$\operatorname{rank}(\boldsymbol{B})=r$，写出二次型 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的一个标准形。

17．已知 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 n 阶实对称矩阵，且 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=n$。记 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式（$i,\ j=1,2,\cdots,n$），并设

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{A_{ij}}{|\boldsymbol{A}|}x_ix_j。$$

（1）记 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，把 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 写成矩阵形式，并证明二次型 $f(\boldsymbol{X})$ 的相伴矩阵为 $\boldsymbol{A}^{-1}$；

（2）问二次型 $g(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 与 $f(\boldsymbol{X})$ 的规范形是否相同？并说明理由。

18．求函数

$$f(x,y,z)=\frac{2x^2+y^2-4xy-4yz}{x^2+y^2+z^2}\quad（x^2+y^2+z^2\neq 0）$$

的最大值和最小值，并找出一个最大值点和最小值点。

§2 正定二次型

1．判断下列二次型的正定性：

（1）$90x_1^2+130x_2^2+71x_3^2-12x_1x_2+48x_1x_3-60x_2x_3$；

（2）$-5x_1^2-6x_2^2-4x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3$；

（3）$10x_1^2+2x_2^2+x_3^2+8x_1x_2+24x_1x_3-28x_2x_3$。

2. 确定λ的取值范围，使得二次型$2x_1{}^2+(2+\lambda)x_2{}^2+\lambda x_3{}^2+2x_1x_2-2x_1x_3+x_2x_3$为正定的。

3. 确定λ的取值范围，使得二次型$x_1{}^2+x_2{}^2+5x_3{}^2+2\lambda x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$为正定的。

4. 已知齐次线性方程组$\begin{cases}(a+3)x_1+x_2+2x_3=0,\\ 2ax_1+(a-1)x_2+x_3=0,\\ (a-3)x_1-3x_2+ax_3=0\end{cases}$有非零解，且矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&1&2\\1&a&-2\\2&-2&9\end{pmatrix}$正定，求$a$的值。

5. 设$\boldsymbol{A}$是n阶正定矩阵，$\lambda>0$。证明$|\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{I}_n|>\lambda^n$。

6. 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=(k\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^2$。

（1）求对角矩阵$\boldsymbol{\Lambda}$，使得$\boldsymbol{B}$与$\boldsymbol{\Lambda}$相似；

（2）问当k为何值时，$\boldsymbol{B}$是正定矩阵。

7. 设n阶实对称矩阵$\boldsymbol{A}$满足$\boldsymbol{A}^3-4\boldsymbol{A}^2+5\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{I}_n$，证明$\boldsymbol{A}$是正定矩阵。

8. 设n阶实对称矩阵$\boldsymbol{A}$满足$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，且$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=r$。$k\geq1$为正整数。

（1） 证明$\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^k$是正定矩阵；

（2） 求$|\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^k|$。

9. 判断二次型$\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1}$的正定性。

10. 用正交变换法将二次型$\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{1\leq i<j\leq n}x_ix_j$化为标准形，并说明它是否正定。

11. 设$\boldsymbol{A}$为3阶实对称矩阵，且满足$\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=2$。

（1） 求$\boldsymbol{A}$的全部特征值；

（2） 问当k为何值时，矩阵$\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{I}$是正定的？

12. 设$\boldsymbol{A}$是一个n阶实对称矩阵，证明：当t充分小时，$\boldsymbol{I}_n+t\boldsymbol{A}$是正定矩阵。

13. 设$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$是n阶半正定矩阵，α，β为正数，证明$\alpha\boldsymbol{A}+\beta\boldsymbol{B}$也是半正定矩阵。

14. 设$\boldsymbol{A}$是n阶正定矩阵，$\boldsymbol{B}$是n阶非零半正定矩阵。证明：$\boldsymbol{AB}$的特征值大于或等于0。

15. 设α，β，γ是一个三角形的内角。证明：对于任意实数x，y，z成立

$$x^2+y^2+z^2\geq2xy\cos\alpha+2xz\cos\beta+2yz\cos\gamma。$$

16. 设$\boldsymbol{A}$是$m\times n$实矩阵，$\boldsymbol{B}=\lambda\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$。证明：当$\lambda>0$时，$\boldsymbol{B}$是正定矩阵。

17. 设$\boldsymbol{A}$是n阶正定矩阵，$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$是都是非零$n$维列向量，满足$\boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}_j=0$

（$i \neq j$）证明：$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$线性无关。

18．设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$为n阶正定矩阵。证明：$\boldsymbol{C}=(a_{ij}b_{ij})$是正定矩阵。

19．已知$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{C}^T & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$是正定矩阵，其中$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$分别为$m$阶、$n$阶对称矩阵，$\boldsymbol{C}$为$m \times n$矩阵。

（1） 若$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix}$，计算$\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}$；

（2） 证明$\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$是正定矩阵。

20．已知$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$是同阶正定矩阵，且$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$是半正定矩阵。证明$\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}$是半正定矩阵。