第 29 卷第 2 期
2013 年 4 月

大 学 数 学
COLLEGE MATHEMATICS

Vol. 29, №. 2
Apr. 2013

一阶线性微分方程组的一种解法

金 路, 朱大训
(复旦大学 数学科学学院,上海 200433)

[摘 要] 利用矩阵知识给出了一阶线性微分方程组的一种用公式表达的解法,其优点在于一方面可以避免繁琐的复矩阵运算以及求复特征向量的运算,另一方面可以简化求解过程.

[关键词] 一阶线性微分方程组; 特征值; 特征向量; 复矩阵

[中图分类号] O175.1 [文献标识码] C [文章编号] 1672-1454(2013)02-0086-05

1 引 言

一阶线性微分方程组的形式为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{f},$$

其相应的齐次线性微分方程组为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y},$$

其中

$$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}(x)&a_{12}(x)&\cdots&a_{1n}(x)\\a_{21}(x)&a_{22}(x)&\cdots&a_{2n}(x)\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}(x)&a_{n2}(x)&\cdots&a_{nn}(x)\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{f}=\begin{pmatrix}f_1(x)\\f_2(x)\\\vdots\\f_n(x)\end{pmatrix},$$

而 $a_{ij}(x)$ $(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n)$, $f_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,n)$为已知函数.

求解一阶线性微分方程组的方法很多,如消元法、待定系数法、常数变易法、算子法、积分变换法等等. 众所周知,这些方法各有利弊. 对于具体的方程组,如何选择简便易行的方法求解,却是常见问题.

利用矩阵方法解非齐次线性微分方程组$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{f}$时,常用的方法如下:如果 $\boldsymbol{A}$ 是可对角化的,则存在 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个线性无关的特征向量$\boldsymbol{h}_1,\boldsymbol{h}_2,\cdots,\boldsymbol{h}_n$ 组成的可逆矩阵

$$\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{h}_1,\boldsymbol{h}_2,\cdots,\boldsymbol{h}_n),$$

使得(记 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为相应的特征值)

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)=\boldsymbol{\Lambda}.$$

在$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{f}$ 两端左乘$\boldsymbol{T}^{-1}$,并记$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{z},\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{f}=\boldsymbol{g}$,便得到

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{z}}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{y})}{\mathrm{d}x}=(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T})(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{y})+\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{f}=\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{z}+\boldsymbol{g}.$$

也就是说,$\boldsymbol{z}$ 满足线性微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}z_i}{\mathrm{d}x}=\lambda_i z_i+g_i(x),\quad i=1,2,\cdots,n,$$

[收稿日期] 2011-04-01

由此可解出 $z_i=\mathrm{e}^{\lambda_i x}\left(C_i+\int g_i(x)\mathrm{e}^{-\lambda_i x}\mathrm{d}x\right)$，其中 C_i 是任意常数($i=1,2,\cdots,n$). 从而 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Tz}$ 就是原方程组的通解.

但在实际操作时，常常遇到复特征值的情况，从而在求实值函数的解时，复数运算会带来不必要的麻烦，求特征向量更增加困难. 而利用待定系数法，运算过程也比较繁琐，因此寻找简便易行的方法，在教学实践和实际应用中很有必要.

2　解法的理论基础

引理 1　齐次线性微分方程组 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}x}=\alpha z_1-\beta z_2,\\ \dfrac{\mathrm{d}z_2}{\mathrm{d}x}=\beta z_1+\alpha z_2\end{cases}$ 的通解为

$$\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_1\cos\beta x-C_2\sin\beta x\\ C_1\sin\beta x+C_2\cos\beta x\end{pmatrix}\mathrm{e}^{\alpha x},$$

其中 C_1,C_2 是任意常数.

直接验证便可得这个引理.

定理 1　设实矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ 的复特征值为 $\alpha\pm\mathrm{i}\beta(\beta\neq 0)$. 记 $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{v}=\beta^{-1}(\boldsymbol{A}-\alpha\boldsymbol{I})\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$. 则齐次线性微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{Ay}$ 的通解为 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Tz}$，其中 $\boldsymbol{z}$ 是齐次线性微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{z}}{\mathrm{d}x}=\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}\boldsymbol{z}$ 的通解，即

$$\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_1\cos\beta x-C_2\sin\beta x\\ C_1\sin\beta x+C_2\cos\beta x\end{pmatrix}\mathrm{e}^{\alpha x},$$

其中 C_1,C_2 是任意常数.

证　若 2×2 的实矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ 有一对共轭复特征值 $\alpha\pm\mathrm{i}\beta$ $(\beta\neq 0)$，注意 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}$ 有相同的特征值，因此满足

$$\begin{aligned}\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})&=\lambda^2-(a+d)\lambda+ad-bc=\det\begin{pmatrix}\lambda-\alpha & -\beta\\ \beta & \lambda-\alpha\end{pmatrix}\\ &=\lambda^2-2\alpha\lambda+\alpha^2+\beta^2,\end{aligned}$$

由此得到 $a+d=2\alpha$，$ad-bc=\alpha^2+\beta^2$.

进一步，求出相应的实向量对 $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$，满足

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}&\Leftrightarrow\begin{cases}(\boldsymbol{A}-\alpha\boldsymbol{I})\boldsymbol{u}-\beta\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0},\\ \beta\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{A}-\alpha\boldsymbol{I})\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}.\end{cases}\\ &\Leftrightarrow\begin{cases}[\beta^2\boldsymbol{I}+(\boldsymbol{A}-\alpha\boldsymbol{I})^2]\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0},\\ \boldsymbol{v}=\beta^{-1}(\boldsymbol{A}-\alpha\boldsymbol{I})\boldsymbol{u}.\end{cases}\end{aligned}$$

注意

$$\begin{aligned}\beta^2\boldsymbol{I}+(\boldsymbol{A}-\alpha\boldsymbol{I})^2&=\begin{pmatrix}a^2-2\alpha a+bc+\alpha^2+\beta^2 & b(a+d-2\alpha)\\ c(a+d-2\alpha) & d^2-2\alpha d+bc+\alpha^2+\beta^2\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}a^2-2\alpha a+bc+ad-bc & 0\\ 0 & d^2-2\alpha d+bc+ad-bc\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}a(a+d-2\alpha) & 0\\ 0 & d(d+a-2\alpha)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

若 $c=0$，则 $\boldsymbol{A}$ 是实上三角矩阵，因此 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是实数，与假设矛盾. 于是可简单取 $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$，则

$\boldsymbol{v}=\beta^{-1}\begin{pmatrix}a-\alpha\\c\end{pmatrix}$. 记

$$\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\begin{bmatrix}u_1 & v_1\\ u_2 & v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \dfrac{a-\alpha}{\beta}\\ 0 & \dfrac{c}{\beta}\end{bmatrix},$$

则 $\boldsymbol{T}$ 必是可逆矩阵. 此时 $\boldsymbol{AT}=\boldsymbol{T}\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}$，或 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}=\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}$. 于是，若 $\boldsymbol{z}$ 是齐次线性微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{z}}{\mathrm{d}x}=\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}\boldsymbol{z}$ 的通解，则 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Tz}$ 满足

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Tz}}{\mathrm{d}x}=T\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{z}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{T}\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}\boldsymbol{z}=\boldsymbol{ATz}=\boldsymbol{Ay}.$$

定理 2 设 n $(n\geqslant 3)$阶实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有一对共轭复特征值 $\alpha\pm\mathrm{i}\beta$ $(\beta\neq 0)$，则由线性方程组

$$\begin{cases}[\beta^2\boldsymbol{I}+(\boldsymbol{A}-\alpha\boldsymbol{I})^2]\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0},\\ \boldsymbol{v}=\beta^{-1}(\boldsymbol{A}-\alpha\boldsymbol{I})\boldsymbol{u}\end{cases}$$

可解出 $\boldsymbol{A}$ 的分别对应于特征值 $\alpha+\mathrm{i}\beta$ 与 $\alpha-\mathrm{i}\beta$ 的实特征向量对$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$，即 $\boldsymbol{u}-\mathrm{i}\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{u}+\mathrm{i}\boldsymbol{v}$.

证 若 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}-\mathrm{i}\boldsymbol{v})=(\alpha+\mathrm{i}\beta)(\boldsymbol{u}-\mathrm{i}\boldsymbol{v})$，则必有 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}+\mathrm{i}\boldsymbol{v})=(\alpha-\mathrm{i}\beta)(\boldsymbol{u}+\mathrm{i}\boldsymbol{v})$，因此

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}(\boldsymbol{A}-\alpha\boldsymbol{I})\boldsymbol{u}-\beta\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0},\\ \beta\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{A}-\alpha\boldsymbol{I})\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0},\end{cases}$$

等价地便是

$$\begin{cases}[\beta^2\boldsymbol{I}+(\boldsymbol{A}-\alpha\boldsymbol{I})^2]\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0},\\ \boldsymbol{v}=\beta^{-1}(\boldsymbol{A}-\alpha I)\boldsymbol{u}.\end{cases}$$

由此可解出对应于 $\alpha+\mathrm{i}\beta$ 与 $\alpha-\mathrm{i}\beta$ 的实特征向量对$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$.

由这个定理可以知道，对于一般的齐次线性微分方程组 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{Ay}$ $(n\geqslant 3)$，当其一对共轭复特征值为 $\alpha\pm\mathrm{i}\beta$ 时，由线性方程组

$$\begin{cases}[\beta^2\boldsymbol{I}+(\boldsymbol{A}-\alpha\boldsymbol{I})^2]\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0},\\ \boldsymbol{v}=\beta^{-1}(\boldsymbol{A}-\alpha\boldsymbol{I})\boldsymbol{u}\end{cases}$$

可解出 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 $\alpha+\mathrm{i}\beta$ 与 $\alpha-\mathrm{i}\beta$ 的实特征向量对$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$. 若 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，则用这样的方法可求出 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个线性无关的特征向量，进而可求出方程 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{Ay}$ 的解.

用常规的方法可求出非齐次线性方程组 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{Ay}+\boldsymbol{f}$ 的特解，进而可求出其通解.

3 具体实例

例 1 求线性微分方程组 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}=-5y_1-y_2+7\mathrm{e}^x-27,\\ \dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}=2y_1-3y_2-\mathrm{e}^x+12\end{cases}$ 的通解.

解 先解齐次线性微分方程组 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}=-5y_1-y_2,\\ \dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}=2y_1-3y_2.\end{cases}$ 此时 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-5 & -1\\ 2 & -3\end{pmatrix}$ 的特征值为 $\lambda=-4\pm\mathrm{i}$，$\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & -1\\ 1 & -4\end{pmatrix}$. 取 $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，并解出 $\boldsymbol{v}=(\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{I})\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$. 所以

$$T=\begin{pmatrix}u_1 & v_1\\ u_2 & v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}.$$

令 $z=T^{-1}y$，则 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\begin{pmatrix}-4 & -1\\ 1 & -4\end{pmatrix}z$. 于是 $z=\begin{pmatrix}C_1\cos x-C_2\sin x\\ C_1\sin x+C_2\cos x\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-4x}$. 所以齐次线性微分方程组的通解为

$$y=Tz=\begin{pmatrix}C_1(\cos x-\sin x)-C_2(\cos x+\sin x)\\ 2C_1\sin x+2C_2\cos x\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-4x}.$$

再解非齐次线性微分方程组. 由于 1 不是 A 的特征值，则设一个特解为 $\begin{cases}y_1=a\mathrm{e}^x+b,\\ y_2=c\mathrm{e}^x+d.\end{cases}$ 代入原方程，得特解 $y^*=\begin{pmatrix}\dfrac{29}{26}\mathrm{e}^x-\dfrac{93}{17}\\ \dfrac{4}{13}\mathrm{e}^x+\dfrac{6}{17}\end{pmatrix}$. 于是原方程的通解为

$$y=\begin{pmatrix}C_1(\sin x-\cos x)-C_2(\sin x+\cos x)\\ 2C_1\cos x+2C_2\sin x\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-4x}+\begin{pmatrix}\dfrac{29}{26}\mathrm{e}^x-\dfrac{93}{17}\\ \dfrac{4}{13}\mathrm{e}^x+\dfrac{6}{17}\end{pmatrix}.$$

例 2　求线性微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}=29y_1+17y_2+7y_3+2x-4\mathrm{e}^x\cos x-2\mathrm{e}^x\sin x.\\ \dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}=-75y_1-45y_2-19y_3-4x+10\mathrm{e}^x\cos x+8\mathrm{e}^x\sin x,\\ \dfrac{\mathrm{d}y_3}{\mathrm{d}x}=74y_1+46y_2+20y_3+2x-8\mathrm{e}^x\cos x-12\mathrm{e}^x\sin x\end{cases}$$

的通解.

解　记 $y=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}$，$A=\begin{pmatrix}29 & 17 & 7\\ -75 & -45 & -19\\ 74 & 46 & 20\end{pmatrix}$，则

$$\det(A-\lambda I)=-(\lambda-2)(\lambda^2-2\lambda+2),$$

因此 A 的特征值为 $\lambda=2,1\pm\mathrm{i}$.

由 $(A-2I)x=\begin{pmatrix}27 & 17 & 7\\ -75 & -47 & -19\\ 74 & 46 & 18\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$，解得 $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$. 注意 $\alpha=1,\beta=1$，再解 $\begin{cases}[\beta^2I+(A-\alpha I)^2]u=\mathbf{0},\\ v=\beta^{-1}(A-\alpha I)u.\end{cases}$ 从

$$[\beta^2I+(A-\alpha I)^2]u=\left[I+\begin{pmatrix}28 & 17 & 7\\ -75 & -46 & -19\\ 74 & 46 & 19\end{pmatrix}^2\right]\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

可得出一个解 $u=(u_1,u_2,u_3)^T=(-2,5,-4)^T$，且

$$v=(A-I)u=\begin{pmatrix}28 & 17 & 7\\ -75 & -46 & -19\\ 74 & 46 & 19\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\ 5\\ -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -4\\ 6\end{pmatrix}.$$

于是 $T=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ -2 & 5 & -4\\ 1 & -4 & 6\end{pmatrix}$ 满足 $AT=T\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

令 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{g}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{f}$，则由 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{z}}{\mathrm{d}x}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&-1\\0&1&1\end{pmatrix}\boldsymbol{z}+\begin{pmatrix}2x\\2\mathrm{e}^x\cos x\\-2\mathrm{e}^x\sin x\end{pmatrix}$ 解得

$$\boldsymbol{z}=\begin{pmatrix}C_1\mathrm{e}^{2x}\\C_2\mathrm{e}^x\cos x-C_3\mathrm{e}^x\sin x\\C_2\mathrm{e}^x\sin x+C_3\mathrm{e}^x\cos x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-x-\dfrac{1}{2}\\\mathrm{e}^x\sin x\\\mathrm{e}^x\cos x\end{pmatrix}.$$

于是

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{z}=\begin{pmatrix}1&-2&1\\-2&5&-4\\1&-4&6\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}C_1\mathrm{e}^{2x}\\C_2\mathrm{e}^x\cos x-C_3\mathrm{e}^x\sin x\\C_2\mathrm{e}^x\sin x+C_3\mathrm{e}^x\cos x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-x-\dfrac{1}{2}\\\mathrm{e}^x\sin x\\\mathrm{e}^x\cos x\end{pmatrix}\right]$$

$$=\begin{pmatrix}C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^x(-2\cos x+\sin x)+C_3\mathrm{e}^x(2\sin x+\cos x)\\-2C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^x(5\cos x-4\sin x)-C_3\mathrm{e}^x(5\sin x+4\cos x)\\C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^x(-4\cos x+6\sin x)+C_3\mathrm{e}^x(4\sin x+6\cos x)\end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix}-x-\dfrac{1}{2}-2\mathrm{e}^x\sin x+\mathrm{e}^x\cos x\\2x+1+5\mathrm{e}^x\sin x-4\mathrm{e}^x\cos x\\-x-\dfrac{1}{2}-4\mathrm{e}^x\sin x+6\mathrm{e}^x\cos x\end{pmatrix}.$$

[参 考 文 献]

[1] 金路，童裕孙，於崇华，张万国. 高等数学[M]. 3 版. 北京：高等教育出版社，2008.

[2] 伍卓群、李勇. 常微分方程[M]. 北京：高等教育出版社，2004.

[3] Leon S J. Linear algebra with applications[M]. 7 版. 北京. 机械工业出版社，2007.

A Solution to the Systems of First-order Linear Differential Equations

JIN Lu， *ZHU Da-xun*

(School of Mathematical Sciences，Fudan University，Shanghai 200433，China)

Abstract：A solution to the systems of first-order linear differential equations is obtained. The key point of this solution is that it can avoid the complicated computation of complex matrix and complex eigenvectors；furthermore，it can simplify the processes of finding the solution.

Key words：first-order linear differential equations；eigenvalue；eigenvector；complex matrix