教　案

# 一阶常微分方程

## 教学内容

在数学理论和实际应用中的许多问题，常常会归结为含有未知量的导数的微分方程问题，因此微分方程理论是科学研究和实际应用中的重要工具，也是经常使用的数学方法之一。对于一阶常微分方程的知识的掌握，是进一步了解和学习更深入的微分方程理论知识的基础，是不可或缺的步骤之一。在本节中主要讲解以下几方面的内容：

（1）介绍一阶微分方程的解的存在与唯一性定理；

（2）重点讲解变量可分离方程、齐次方程、全微分方程、一阶线性方程和 Bernoulli 方程的解法；

（3）介绍一些可化为这几类方程的方法；

（4）根据一些简单数学模型，介绍数学建模的思想。

## 教学思路和要求

（1）变量可分离方程、齐次方程、全微分方程、一阶线性方程和 Bernoulli 方程，是本节的内容的基础和重点。

（2）因为有固定的方法，如何解这些类方程对于学生来说比较容易。但对于一些方程如何经过适当变形处理后化为这几类方程的技巧，对于学生们来说就不容易了。这就需要多举例和适当引导，特别是典型技巧的介绍。

（3）通过一些具体实例，介绍一些简单数学模型的建立方法，这对于学生们了解数学的应用很有帮助，也会提高他们的学习兴趣。这是常微分方程这一章教学内容的重要环节。

## 教学安排

一．解的存在与唯一性定理

导数已解出的一阶常微分方程可以表示为如下的一般形式

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{10.2.1}$$

对于这类定解问题，有以下解的存在与唯一性定理

**定理 10.2.1（解的存在与唯一性定理）** 如果 $f(x,y)$ 和 $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ 在矩形区域 $\{(x,y) \mid |x-x_0|<a, |y-y_0|<b\}$ 上连续，那么存在一个正数 $h$（$0<h\le a$），使得定解问题（10.2.1）在 $|x-x_0|<h$ 上有唯一的解 $y=\varphi(x)$，即在 $|x-x_0|<h$ 上成立

$$\varphi'(x) = f(x,\varphi(x))$$

及

$$\varphi(x_0)=y_0。$$

这个定理的证明超出本课程的要求，此处从略。

在这个定理中，只说明了在局部的解的存在性和唯一性，而且也没有说明解的表达式如何。事实上，并不是每个一阶常微分方程的解都可以用初等函数或它们的有限次积分来表达（这种方法称为初等积分法）。例如，Liouville 在 1841 牛就证明了方程 $y'=y^2+x$ 不能用初等积分法来求解，虽然它看起来形式很简单。因此，下面对一些常见类型的方程的解法进行介绍。

**二．变量可分离方程**

若一阶方程 $\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$ 中的 $f(x,y)$ 可以分解成 $x$ 的函数 $g(x)$ 与 $y$ 的函数 $h(y)$ 的乘积，即

$$\frac{dy}{dx}=g(x)\cdot h(y) \tag{10.2.2}$$

则称其为**变量可分离方程**。

若 $g(x)$ 与 $h(y)$ 连续，把原方程改写成

$$\frac{dy}{h(y)}=g(x)dx,$$

对两边取不定积分，得

$$\int\frac{dy}{h(y)}=\int g(x)dx,$$

若 $G(x)$ 是 $g(x)$ 的一个原函数，$H(y)$ 是 $\dfrac{1}{h(y)}$ 的一个原函数，就得到方程的通解

$$H(y)=G(x)+C,$$

这里 $C$ 是任意常数[①]。这种形式的解也称为**隐式解**。

若 $y_0$ 是方程 $h(y)=0$ 的根，函数 $y=y_0$ 也是方程（10.2.2）的解，而且这个解并不一定包含在通解的表达式中。

例 10.2.1 求解微分方程

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y^2=1。$$

**解**　将此方程化为变量可分离方程

$$\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{1-y^2},$$

[①] 今后我们总用 $C$ 表示任意常数。虽然它可能在同一问题中每次出现时并一定相同，也不再特别说明。

即

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\pm\, dx\text{。}$$

两边积分得

$$\arcsin y=\pm x+C\text{；}$$

即

$$y=\sin(x+C)\text{。}$$

注意 $y=\pm 1$ 也是方程的两个解，但它们并不在通解之中。

例 10.2.2 解定解问题

$$\begin{cases}\sin x\dfrac{dy}{dx}=y\ln y,\\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=e.\end{cases}$$

**解**　将此方程化为

$$\frac{dy}{y\ln y}=\frac{dx}{\sin x}\text{，}$$

两边积分得

$$\ln\ln y=\ln(\csc x-\cot x)+\ln C\text{。}$$

即

$$\ln y=C(\csc x-\cot x)\text{。}$$

由 $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=e$ 得 $C=1$。因此定解问题得解为

$$y=e^{\csc x-\cot x}\text{。}$$

例 10.2.3 设函数 $f$ 在 $(0,+\infty)$ 上可导，且满足

$$\int_1^x f(t)dt=(x^3+x^2)f(x)-2\text{，}$$

求 $f(x)$。

**解**　显然 $f(1)=1$。对 $\int_1^x f(t)dt=(x^3+x^2)f(x)-2$ 两边求导得

$$f(x)=(x^3+x^2)f'(x)+(3x^2+2x)f(x)\text{，}$$

因此函数 $f$ 满足方程

$$(x^3+x^2)y'=[1-(3x^2+2x)]y \text{。}$$

对方程分离变量得

$$\frac{dy}{y}=\left(\frac{1}{x^3+x^2}-\frac{3x^2+2x}{x^3+x^2}\right)dx,$$

两边积分得

$$\ln y=\int\left(\frac{1}{x^3+x^2}-\frac{3x^2+2x}{x^3+x^2}\right)dx$$

$$=\int\frac{1}{x^3+x^2}dx-\int\frac{3x^2+2x}{x^3+x^2}dx=\int\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx-\int\frac{3x^2+2x}{x^3+x^2}dx$$

$$=\ln(1+x)-\ln x-\frac{1}{x}-\ln(x^3+x^2)+\ln C.$$

所以

$$y=C\frac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x}} \text{。}$$

因此 $f$ 就具有上述形式。又由 $f(1)=1$ 得 $C=e$，所以

$$f(x)=\frac{1}{x^3}e^{1-\frac{1}{x}}, \quad x\in(0,+\infty) \text{。}$$

**例 10.2.4（跟踪问题一）** 设 $A$ 在初始时刻从坐标原点沿 $y$ 轴正向前进，与此同时 $B$ 于 $(a,0)$ 处始终保持距离 $a$ 对 $A$ 进行跟踪（$B$ 的前进方向始终对着 $A$ 当时所在的位置），求 $B$ 的运动轨迹。

**解** 设 $B$ 的运动轨迹为

$$y=y(x)$$

利用跟踪的要求和导数的几何意义（图 10.1.1），容易得到数学模型

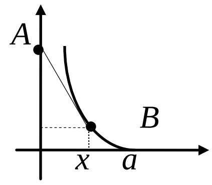

图 10.2.1

$$\begin{cases} y'=-\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}, \\ y(a)=0. \end{cases}$$

两边取定积分

$$\int_0^y dy=-\int_a^x\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}dx,$$

即得到 $B$ 的运动轨迹方程为

$$y = a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x} - \sqrt{a^2-x^2}\text{ 。}$$

上述积分曲线可以看成一个重物$B$被某人$A$用一根长度为$a$的绳子拖着走时留下的轨迹，所以该曲线又被称为**曳线**。

**三．齐次方程**

若对于任何$\tau \ne 0$

$$f(\tau x,\tau y) = f(x,y)\text{，}$$

则称函数$f(x,y)$为（0 次）**齐次函数**，相应的微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

相应地称为**齐次方程**。

令$y = ux$，代入方程得

$$\frac{d(ux)}{dx} = u + x\frac{du}{dx} = f(x,ux) = f(1,u)\text{，}$$

化简后就是变量可分离方程

$$x\frac{du}{dx} = f(1,u) - u\text{，}$$

解出方程后，用$u = \dfrac{y}{x}$代入便得到方程的解。

**例 10.2.5** 求方程

$$(xy - y^2)dx - (x^2 - 2xy)dy = 0$$

的通解。

**解** 将方程写成

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy - y^2}{x^2 - 2xy}\text{，}$$

容易判断，这是一个齐次方程。令$y = ux$，得到

$$x\frac{du}{dx} = \frac{u - u^2}{1 - 2u} - u = \frac{u^2}{1 - 2u}\text{。}$$

于是

$$\frac{1-2u}{u^2}du = \frac{1}{x}dx\text{，}$$

解此方程得

$$-\frac{1}{u} - 2\ln u = \ln x + C\text{。}$$

用$u = \dfrac{y}{x}$代入，便得到方程的隐式通解

$$\frac{x}{y}+2\ln y-\ln x+C=0\text{。}$$

对于形如

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$$

的方程，显然，当$c_1=c_2=0$时，这是齐次方程。

当$c_1$，$c_2$不全为零时，若行列式$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$，作变换

$$\begin{cases} x=\tilde{x}-\xi, \\ y=\tilde{y}-\eta \end{cases}$$

将方程变为

$$\frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}}=\frac{a_1\tilde{x}+b_1\tilde{y}-(a_1\xi+b_1\eta-c_1)}{a_2\tilde{x}+b_2\tilde{y}-(a_2\xi+b_2\eta-c_2)},$$

从线性代数方程组

$$\begin{cases} a_1\xi+b_1\eta=c_1, \\ a_2\xi+b_2\eta=c_2 \end{cases}$$

中解出$\xi,\eta$，就得到了关于$\tilde{x},\tilde{y}$的齐次方程

$$\frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}}=\frac{a_1\tilde{x}+b_1\tilde{y}}{a_2\tilde{x}+b_2\tilde{y}}\text{。}$$

若行列式$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$，则两行对应成比例。若$b_1,b_2$全为零，那么原方程为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_1x+c_1}{a_2x+c_2},$$

它是可解的。若$b_1,b_2$不全为零，不妨设$b_1\neq 0$，设$\lambda$是常数使得$(a_2,b_2)=\lambda\,(a_1,b_1)$。令$u=a_1x+b_1y$，则

$$\frac{du}{dx}=a_1+b_1\frac{dy}{dx}=a_1+b_1\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}=a_1+b_1\frac{u+c_1}{\lambda u+c_2},$$

因此原方程变为变量可分离方程。

综上所述，形式为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$$

的微分方程总是可解的，并且可以推广到

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$$

的情况。

例 10.2.6　求方程

$$(2x-5y+3)dx-(2x+4y-6)dy=0$$

的通解。

**解**　由于行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}\neq 0\text{，}$$

由线性代数方程组

$$\begin{cases} 2\xi-5\eta=3, \\ 2\xi+4\eta=-6 \end{cases}$$

解出$\xi=\eta=-1$。作变换

$$\begin{cases} x=\tilde{x}-\xi=\tilde{x}+1, \\ y=\tilde{y}-\eta=\tilde{y}+1, \end{cases}$$

得到齐次方程

$$\frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}}=\frac{2\tilde{x}-5\tilde{y}}{2\tilde{x}+4\tilde{y}}\text{。}$$

令$\tilde{y}=u\tilde{x}$，得到

$$u+\tilde{x}\frac{du}{d\tilde{x}}=\frac{2-5u}{2+4u}\text{，}$$

整理后得

$$\int\left[\frac{4}{1-4u}-\frac{2}{u+2}\right]du=\int\frac{3d\tilde{x}}{\tilde{x}}\text{，}$$

从此解得

$$(1-4u)(u+2)^2\tilde{x}^3=C\text{。}$$

还原变量，便得方程的通解

$$(x-4y+3)(y+2x-3)^2=C\text{。}$$

## 四．全微分方程

若存在函数$u(x, y)$使得

$$du(x,y) = f(x,y)dx + g(x,y)dy,$$

则称方程

$$f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0$$

为**全微分方程**。显然，它的解可以表示为

$$u(x,y) = C。$$

我们已经知道，$f(x,y)dx + g(x,y)dy$在单连通区域上是某个函数的全微分的充分必要条件是

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial g(x,y)}{\partial x},$$

此时，若$(x_0, y_0)$是所考虑区域中的任一定点，则可以通过曲线积分

$$u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} f(x,y)dx + g(x,y)dy,$$

计算出$u(x, y)$。

例 10.2.7　求微分方程

$$(e^x \sin y - mx)y' = e^x \cos y + my$$

的通解（$m$ 是常数）。

**解**　将其改写为

$$(e^x \cos y + my)dx + (-e^x \sin y + mx)dy = 0,$$

由

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -e^x \sin y + m = \frac{\partial g(x,y)}{\partial x},$$

知道它是全微分方程。取$(x_0, y_0)$为$(0, 0)$，则

$$u(x,y) = \int_0^x (e^x \cos y + my)dx + \int_0^y (-\sin y)dy = e^x \cos y + mxy - 1,$$

所以它的通解为

$$e^x \cos y + mxy = C。$$

若条件

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial g(x,y)}{\partial x}$$

不满足，则方程

$$f(x,y)dx+g(x,y)dy=0$$

不是全微分方程。但是，如果此时能够找到一个函数$\mu(x,y)$，使得

$$\mu(x,y)f(x,y)dx+\mu(x,y)g(x,y)dy=0$$

是全微分方程，那么，还是可以按上述方法求解的。

这里的$\mu(x,y)$称为**积分因子**。一般说来，求积分因子并不是很容易的事，但对于一些简单的情况，可以通过观察凑出积分因子。

例 10.2.8　求方程

$$ydx-xdy+y^2xdx=0$$

的通解。

**解**　容易验证，这不是全微分方程。但观察其前 2 项，可以发现，只要乘上因子$\dfrac{1}{y^2}$，它就是一个全微分

$$\frac{ydx-xdy}{y^2}=d\left(\frac{x}{y}\right)。$$

因此，取积分因子为$\dfrac{1}{y^2}$，将原方程改写为

$$\frac{ydx-xdy}{y^2}+xdx=0，$$

这就是

$$d\left(\frac{x}{y}\right)+d\left(\frac{x^2}{2}\right)=0，$$

所以方程的通解为

$$\frac{x}{y}+\frac{x^2}{2}=C。$$

例 10.2.9　求方程

$$(2x\sqrt{x^2+y^2}+x)dx+(\sqrt{x^2+y^2}+y)dy=0$$

的通解。

**解**　容易验证，这不是全微分方程。将方程改写为

$$xdx+ydy+\sqrt{x^2+y^2}(2xdx+dy)=0，$$

乘上积分因子 $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 后，方程变为

$$\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}+2xdx+dy=0,$$

即

$$d(\sqrt{x^2+y^2})+d\left(x^2+y\right)=d\left[\sqrt{x^2+y^2}+\left(x^2+y\right)\right]=0。$$

所以方程的通解为

$$\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y=C。$$

从以上两个例子可以看出，我们利用了一些已知的二元函数的全微分来观察出积分因子。下面列出一些常用的二元函数的全微分，以备查阅：

$$d(xy)=ydx+xdy;$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{ydx-xdy}{y^2};$$

$$d(\sqrt{x^2+y^2})=\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

$$d\left(\ln(x^2+y^2)\right)=2\cdot\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2};$$

$$d\left(\arctan\frac{x}{y}\right)=\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}。$$

## 五．线性方程

一阶线性常微分方程的一般形式为

$$\frac{dy}{dx}+f(x)y=g(x)。$$

利用分离变量法，易知齐次线性方程

$$\frac{dy}{dx}+f(x)y=0$$

的通解为

$$y=C\mathrm{e}^{-\int f(x)dx}。$$

为了找非齐次线性方程的一个特解，我们利用**常数变易法**（实际上就是待定系数法，只是待定的“系数”是函数）。令 $C=u(x)$，将

$$y=u(x)\mathrm{e}^{-\int f(x)dx}$$

代入方程$\dfrac{dy}{dx}+f(x)y=g(x)$，则有

$$[u'(x)\mathrm{e}^{-\int f(x)dx}-u(x)f(x)\mathrm{e}^{-\int f(x)dx}]+u(x)f(x)\mathrm{e}^{-\int f(x)dx}=g(x),$$

即

$$u'(x)=g(x)\,\mathrm{e}^{\int f(x)dx}。$$

因此可得

$$u(x)=\int g(x)\mathrm{e}^{\int f(x)dx}dx+C。$$

于是，非齐次线性方程的通解为

$$y=\left(\int g(x)\mathrm{e}^{\int f(x)dx}dx+C\right)\mathrm{e}^{-\int f(x)dx}。$$

显然，齐次线性方程的解的线性组合仍是齐次线性方程的解。而且上式说明了，非齐次线性方程的通解等于该方程的一个特解加上齐次线性方程的通解，这与线性代数方程组的结论类似

例 10. 2. 10 解定解问题

$$\begin{cases} x\dfrac{dy}{dx}+y-e^{x}=0, \\ y|_{x=1}=e. \end{cases}$$

**解**　将方程化为

$$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=\frac{e^{x}}{x}。$$

此方程的通解为

$$y=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left[C+\int\frac{e^{x}}{x}e^{\int\frac{1}{x}dx}dx\right]=\frac{1}{x}\left[C+e^{x}\right]。$$

由$y|_{x=1}=e$得$C=0$。于是，定解问题的解为$y=\dfrac{e^{x}}{x}$。

例 10. 2. 11　求微分方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x+y^{3}}$$

的通解。

**解**　此方程不是线性方程，但将方程变形为

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x+y^{3}}{y},$$

即

$$\frac{dx}{dy}-\frac{1}{y}x=y^2。$$

就是一个关于 $x$ 的线性方程。于是得通解

$$x=e^{\int\frac{dy}{y}}\left[C+\int y^2e^{-\int\frac{dy}{y}}dy\right]=Cy+\frac{1}{2}y^3。$$

注意 $y=0$ 是方程的一个特解。

**例 10.2.12** 求微分方程

$$e^y-\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$$

的通解。

**解** 把方程改写为

$$e^y\left(1+\frac{de^{-y}}{dx}\right)=\frac{1}{x}。$$

令 $z=e^{-y}$，原方程就化为

$$\frac{dz}{dx}-\frac{1}{x}z=-1。$$

这是一个关于 $z$ 的线性方程。解此方程得

$$z=-x\ln x+Cx。$$

将 $z=e^{-y}$ 代入就得原方程的通解

$$y=-\ln(Cx-x\ln x)。$$

**例 10.2.13** 设物质 $A$ 经化学反应后，全部生成另一种物质 $B$。设原有 $A$ 物质 10 千克，经一小时生成 $B$ 物质 3 千克。求

（1） 3 小时后，多少 $A$ 物质已起反应？

（2） 多少时间后，$A$ 物质已有 75%起反应？

**解** 这是化学反应问题，它应遵循质量作用定律：化学反应速度与参与反应的物质的有效质量或浓度成正比。

设 $x(t)$（单位：千克）为时刻 $t$（单位：小时）已生成的 $B$ 物质的质量，那么

$y=10-x(t)$ 就是时刻 $t$ $A$ 物质参与反应的有效质量。由上述定律得

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=k(10-x),\\ x(0)=0,\ x(1)=3.\end{cases}$$

解上述线性方程得

$$x=10-Ce^{-kt}。$$

由 $x(0)=0$， $x(1)=3$ 解得 $C=10$， $k=-\ln\frac{7}{10}$。于是

$$x=10\left[1-\left(\frac{7}{10}\right)^t\right]。$$

（1）3 小时后， $A$ 物质起反应的量是

$$x(3)=10\left[1-\left(\frac{7}{10}\right)^3\right]\approx 6.57\text{（千克）。}$$

（2）若已有 75%的 $A$ 物质起反应，因此生成了 $10\times 75\%=7.5$ 千克的 $B$ 物质，于是由

$$10\left[1-\left(\frac{7}{10}\right)^t\right]=7.5$$

解得 $t\approx 3.887$ （小时）。

**六．Bernoulli 方程**

形如

$$\frac{dy}{dx}+f(x)y=g(x)y^n,$$

的方程称为 **Bernoulli 方程**，当 $n=0$ 和 1 时，就是线性方程。

当 $n\neq 0$ 和 1 时，方程两端除以 $y^n$，便得到

$$\frac{1}{y^n}\frac{dy}{dx}+f(x)\frac{1}{y^{n-1}}=g(x)。$$

令 $u=\frac{1}{y^{n-1}}$，则 $du=(1-n)\frac{1}{y^n}dy$，于是方程变为

$$\frac{du}{dx}+(1-n)f(x)u=(1-n)g(x),$$

这是关于 $u$ 的线性方程。按前面的方法解出方程后用 $u=\frac{1}{y^{n-1}}$ 代入，就得到了原方程的解。

注意当 $n>0$ 时， $y=0$ 是方程的解。

**例 10.2.14** 求方程

$$\frac{dy}{dx}-y=xy^5$$

的通解。

**解** 方程两端除以 $y^5$，便得到

$$\frac{1}{y^5}\frac{dy}{dx}-\frac{1}{y^4}=x。$$

令$u=\dfrac{1}{y^4}$，方程变为

$$\frac{du}{dx}+4u=-4x,$$

解得

$$u=\frac{1}{y^4}=C\mathrm{e}^{-4x}-x+\frac{1}{4}。$$

例 10.2.15 解定解问题

$$\begin{cases} x\ln x\sin y\dfrac{dy}{dx}+\cos y(1-x\cos y)=0, \\ y(1)=0. \end{cases}$$

**解** 把方程写为

$$-x\ln x\frac{d\cos y}{dx}+\cos y=x\cos^2 y。$$

令$z=\cos y$，那么原方程化为

$$\frac{dz}{dx}-\frac{1}{x\ln x}z=-\frac{1}{\ln x}z^2$$

这是 Bernoulli 方程。再令$u=z^{-1}$将此方程化为

$$\frac{du}{dx}+\frac{1}{x\ln x}u=\frac{1}{\ln x}。$$

解此方程得

$$u=\frac{1}{\ln x}(C+x),$$

还原回原变量便得

$$(x+C)\cos y=\ln x。$$

由于$y(1)=0$，所以$C=-1$，因此定解问的解为

$$(x-1)\cos y=\ln x。$$

## 七．数学建模

随着科学技术的发展和进步，数学这一重要基础学科在自然科学和社会科学领域中的应用越来越广泛，数学与电子计算机技术相结合，已成为一种重要的、可以实现的技术。数学的理论与工具，在解决自然科学、工程技术乃至社会科学等各个领域的实际问题中发挥着越来越明显、甚至是举足轻重的作用。

现实世界中的问题，常常并不是以一个现成的数学问题形式出现的，是要用数学技术去解决实际问题，首先必须将所考虑的现实问题通过“去芜存菁，去伪存真”的深入分析和研究，利用数学的抽象、方法与工具将其归结为一个相应的数学问题，这个过程称为**数学建模**，所得到的数学问题称为**数学模型**。

数学建模可以使用多种数学方法，对同一问题可以建立不同形式的数学模型，而其中一个重要的工具是微积分。先来看一个 很简单、但在历史上非常著名的例子。

例 10.2.16 **Malthus 人口模型** 设 $p(t)$ 是某地区的人口数量关于时间函数，那么该地区在单位时间中的人口增长数，即人口增长率，应该是人口数量函数的导数 $p'(t)$。

显然，某一时刻的人口数量越多，在单位时间中的人口增长数也就越多。通过对当时的资料分析，Malthus 认为人口增长率与人口数量成正比。设比例系数为λ（λ 可以由已有的资料定出），于是他在 1798 年提出了历史上第一个人口模型

$$\begin{cases} p'(t) = \lambda p(t), \\ p(t_0) = p_0. \end{cases}$$

对 $\dfrac{dp}{p} = \lambda dt$ 两边积分得

$$\ln p = \lambda t + C,$$

也就是

$$p = C\,\mathrm{e}^{\lambda t}。$$

令 $t = t_0$ 并利用初始条件 $p(t_0) = p_0$，可以定出

$$C = p_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t_0},$$

最终得到人口数量函数

$$p(t) = p_0\,\mathrm{e}^{\lambda(t-t_0)}。$$

**Logistic 人口模型** Malthus 人口模型的解

$$p = p_0\,\mathrm{e}^{\lambda(t-t_0)}$$

当 $t \to +\infty$ 时有 $p(t) \to +\infty$，这显然是荒谬的，因为人口的数量增加到一定程度后，自然资源和环境条件就会对人口的继续增长起限制作用，并且限制的力度随人口的增加而越来越强。也就是说，在任何一个给定的环境和资源条件下，人口的增长不可能是无限的，它必定有一个上界 $p_{\max}$。

因此，荷兰生物数学家 Verhulst 认为，人口的增长速率应随着 $p(t)$ 接近 $p_{\max}$ 而越来越小，他提出了一个修正的人口模型

$$\begin{cases} p'(t) = \lambda\left[1 - \dfrac{p(t)}{p_{\max}}\right]p(t), \\ p(t_0) = p_0. \end{cases}$$

将方程 $p'(t) = \lambda\left[1 - \dfrac{p(t)}{p_{\max}}\right]p(t)$ 中含有 $p$ 的项全部集中到左边，两边在 $[t_0, t]$ 上积分，即

$$\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p_{\max} \cdot p - p^2} = \frac{\lambda}{p_{\max}} \int_{t_0}^{t} dt\,,$$

由此解出

$$p = \frac{p_{\max}}{1 + (\frac{p_{\max}}{p_0} - 1)\,\mathrm{e}^{-\lambda(t - t_0)}}\,。$$

显然，当 $t \to +\infty$ 时有 $p(t) \to p_{\max}$。

美国和法国都曾用这个模型预测过人口，结果是令人满意的。

形如

$$\frac{dy}{dx} = r(M - y)y$$

的方程称为 **Logistic 方程**（$r$, $M$ 为正常数），其解为

$$y = \frac{M}{1 + Ce^{-rMx}} \quad （C 是任意常数）。$$

当 $C > 0$ 时，这个函数的图形见图 10.2.2，称之为 **Logistic 曲线**。Logistic 模型在生物学、环境科学、经济学以及社会学等领域有着重要的应用。

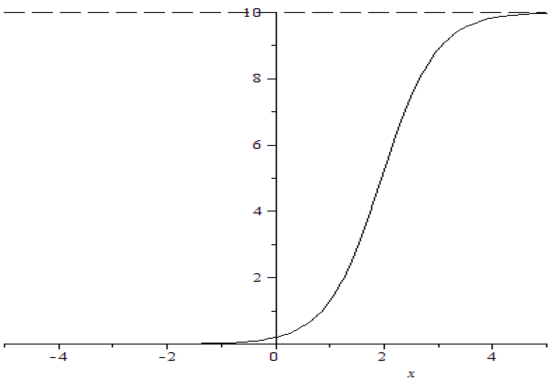


图 10.2.2

**例 10.2.17** 已知 $P_0$ 为海平面处的气压，求大气压强随高度的变化规律。

**解** 取坐标原点在海平面上，$h$ 轴铅直向上（见图 10.2.3）。我们知道，在一点处的大气压强就是该点处的水平单位面积上空的空气柱的重量。因此大气压强 $P$ 是海平面之上高度 $h$ 的函数，即 $P = P(h)$。

在高度 $h$ 处取高度微元 $dh$，则高度 $h+dh$ 与 $h$ 之间的压强之差 $dP$ 应等于以单位面积为底的、高为 $dh$ 的立体中的空气重量。设 $\rho=\rho(h)$ 为高度 $h$ 处的空气密度，则当 $dh$ 很小时，$\rho$ 可看作相对不变的，因此

$$dP=-\rho g dh,$$

等式中的负号是由于随高度升高而压强减小。

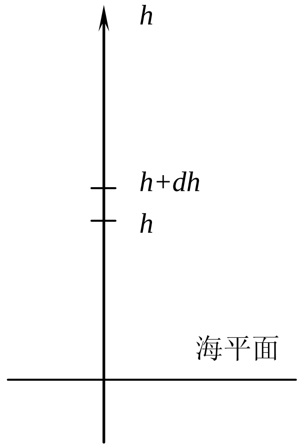

图 10.2.3

由气体状态方程可知

$$\rho=\frac{\mu P}{RT},$$

其中 $R$ 是气体常数，$\mu$ 是气体的分子量，$T$ 是绝对温度。因此

$$dP=-\frac{\mu g P}{RT}dh。$$

这就是压强 $P=P(h)$ 应满足的微分方程。

我们用分离变量法解此方程。将方程化为 $\frac{dP}{P}=-\frac{\mu g}{RT}dh$，再取积分得

$$\ln P=-\frac{\mu g}{RT}h+C,$$

因此微分方程的通解为

$$P=Ce^{-\frac{\mu g}{Rt}h}, \qquad C \text{ 是任意常数。}$$

注意到在海平面处的气压为 $P_0$，即 $P(0)=P_0$，所以 $C=P_0$。于是便得大气压强随高度的变化规律为

$$P=P_0e^{-\frac{\mu g}{Rt}h}。$$

**例 10.2.18** 某条曲线满足如下光学性质：在曲线外存在一点 $O$，从 $O$ 点置一个点光源，光线经曲线反射后成为一束平行光射出，求曲线方程。

**解** 显然，这条曲线一定是轴对称的，且 $O$ 点在对称轴上。现以对称轴为 $x$ 轴、$O$ 点为原点建立直角坐标系（见图 10.2.4。由于对称性，只画出了一半）。

因 $O$ 点射出的光线经曲线上点 $P(x,y)$ 反射后与 $x$ 轴平行，过 $P$ 作曲线的切线交 $x$ 轴于 $Q$，则△$OPQ$ 是等腰三角形，于是

$$OP=OQ=QR-OR。$$

这里，$R$ 是 $P$ 向 $x$ 轴所引垂线的垂足。由于

$$OP=\sqrt{x^2+y^2},\ QR=\frac{y}{\tan\theta}=\frac{y}{y'},\ OR=x,$$

即得到齐次方程

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{y}。$$

令 $x = uy$，整理后方程变为

$$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{dy}{y},$$

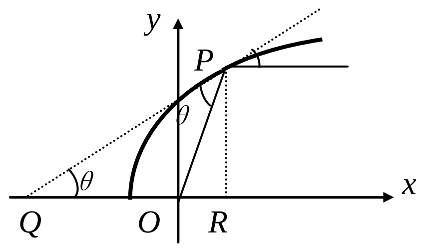

图 10.2.4

将积分常数记为 $-\ln p$，解得

$$\ln(u+\sqrt{1+u^2}) = \ln y - \ln p,$$

或者写成

$$\sqrt{1+u^2} = \frac{y}{p} - u。$$

两边平方，并注意到 $x = uy$，便得到曲线方程

$$x = \frac{1}{2p}y^2 - \frac{p}{2},$$

这是焦点在原点的抛物线方程。因此，满足上述光学性质的曲线必是抛物线。以上述任何一条抛物线为母线，绕 $x$ 轴旋转一周而得的旋转抛物面就能把平行于 $x$ 轴的光线全部反射到焦点上。

例 10.2.19　求由电阻 $R$、电感 $L$ 和电源 $E = U\sin\omega t$ 组成的 $RL$ 串联电路（图 10.2.5）的电流变化规律 $I(t)$（$R$、$L$ 和 $U$ 都是常数），已知 $t = 0$ 时的电流为 $I_0$。

**解**　由 Kirchhoff 定律，

$$E = RI(t) + L\frac{dI(t)}{dt},$$

即得到线性微分方程

$$\begin{cases} \dfrac{dI}{dt} + \dfrac{R}{L}I = \dfrac{U}{L}\sin\omega t, \\ I(0) = I_0. \end{cases}$$

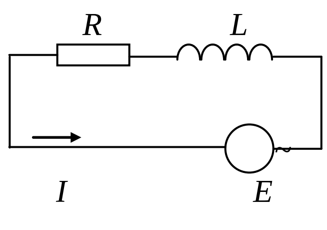

图 10.2.5

齐次线性方程 $\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = 0$ 的通解为 $C\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}$。而非齐次线性方程的特解可以取为

$$\left(\int \frac{U}{L}\sin\omega t\,\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}\,dt\right)\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} = U\frac{R\sin\omega t - \omega L\cos\omega t}{L^2\omega^2 + R^2},$$

于是非齐次线性方程的通解为

$$I(t)=C\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}+U\frac{R\sin\omega t-\omega L\cos\omega t}{L^2\omega^2+R^2}\text{。}$$

令 $I(0)=I_0$，得到

$$C=I_0+\frac{\omega LU}{L^2\omega^2+R^2}\text{，}$$

因此

$$I(t)=\left(I_0+\frac{\omega LU}{L^2\omega^2+R^2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}+U\frac{R\sin\omega t-\omega L\cos\omega t}{L^2\omega^2+R^2}\text{。}$$

## 八．习　　题

1， 2， 3.（1）、（3）、（5）、（6）、（7），4.（1）、（4）。5 ， 9，
11．（2）、（4），12.（2），13.（2），14 ，15，（1）、（3）、（5），16.（2）、（3），
17．（2）、（4）、（6）、（8）、（9），18．（1）、（3），19，20，21，23.（1）、（3）、（5），25。