教　案

定积分的几何应用

教学内容

与曲边形的面积、变速直线运动的路程一样，自然科学、社会科学和生产实践中出的一大类量都是累积效应的结果，它们可以用 Riemann 和式的极限来刻画，即用定积分来度量。本节讲解定积分的几何应用，主要是以下几方面的内容：

（1）　微元法；
（2）　平面图形的面积；
（3）　已知平行截面面积的立体体积和旋转体的体积；
（4）　曲线的弧长及其曲率；
（5）　旋转曲面的面积。

教学思路和要求

（1）微元法是由局部性态的讨论最后合成整体的累积效应、即定积分的方法，要详细讲透其思想，使学生在今后能够举一反三地使用；

（2）在用推导公式时，注意说明选取微元的着眼点与理由，并注意说明整体微元如何导出，使学生学会灵活运用微元法；

（3）注意几何背景的说明，并结合实际例子说明一些图形的特点与画法，以及积分区间的选取；

（4）注意指出对于复杂的几何图形，在计算时要具体问题具体分析，可能要分几部分来讨论，不能直接套用公式。最好举例说明处理方法。

教学安排

一．微元法

为说明具有哪些特征的量有望用定积分刻画，我们再度分析一下$I=\int_a^b f(t)dt$的概念。

首先，对固定的函数 f，I 取决于积分区间。定积分具有一个十分重要的性质：可加性，即$[a,b]$被分为许多部分小区间，则I 被相应地分成许多部分量ΔI_i，总量I 等于诸部分量之和，即 $I=\sum \Delta I_i$。凡能用定积分描述的量都应具有这种可加性的特征。

其次，由于可加性，问题便化为部分量ΔI 的计算。对连续函数 f，记 $I(x)=\int_a^x f(t)dt$，则有$I'(x)=f(x)$，所以

$$\Delta I = I(x+\Delta x)-I(x)=f(x)dx+o(dx)。$$

由此可见，对于能用定积分刻画的量，其在**区间微元**$[x,x+dx]$上的部分量应能近似地表现为dx的线性函数，即$\Delta I\approx f(x)dx$，而且其误差应是比dx高阶的无穷小。

上面的dx是自变量的微分，在应用中常被称作x的**微元**。它是一个变量。一

方面，在变化过程的每一时刻，即相对静止时，它是一个有限量；另一方面，其变化趋势则以 0 为极限，即是一个无穷小量。记微分形式 $f(x)dx$ 为 dI，在应用中常被称作量 $I(x)$ 的微元。总量 I 即是微元 $dI=f(x)dx$ 的积分。

我们宁愿把 $f(x)dx$ 称作**微元**，而不直接称为 I 的微分，原因在于实际应用时，往往和上述由积分 I 导出微元 dI 的过程相反，**微元法**是由微元 $f(x)dx$ 出发导出积分，即由局部性态的讨论最后合成整体的累积效应。

如果我们要处理某个量 I，它与变量 x 的变化区间 $[a,b]$ 有关，而且

（1） 满足关于区间的可加性，即整体等于局部之和；

（2）它在 $[x,x+dx]$ 上的部分量 ΔI 近似于 dx 的一个线性函数，即 $\Delta I-dI=o(dx)$，其中 $dI=f(x)dx$ 称之为量 I 的微元。

那么，以微元 $dI=f(x)dx$ 为被积表达式，作积分即得

$$I=\int_a^b f(x)dx。$$

诸如弧长、面积、体积、引力、压力、功等几何量和物理量都具有某种可加性，且其小增量均可用微元近似表示，从而它们都可用定积分计算。

在应用问题中往往略去关于 $\Delta I-dI=o(dx)$ 的验证。

二．面积问题（直角坐标下的区域）

考察由曲线 $y=f(x)$，$y=g(x)$ 和直线 $x=a$，$x=b$（$a<b$）所围平面图形的**面积**。

先设 $f\ge g$，变量 x 的变化区间为 $[a,b]$。显然，面积具有关于区间的可加性。在区间微元 $[x,x+dx]$ 上，相应的小曲边形（图 3.4.1 中阴影部分）面积 ΔA 近似等于高为 $f(x)-g(x)$，宽为 dx 的矩形面积，即

$$\Delta A\approx[f(x)-g(x)]dx，$$

所以，面积微元为

$$dA=[f(x)-g(x)]dx。$$

于是，所求的面积

$$A=\int_a^b[f(x)-g(x)]dx。$$

如果删去条件 $f\ge g$，同样可得

$$dA=|f(x)-g(x)|dx，$$

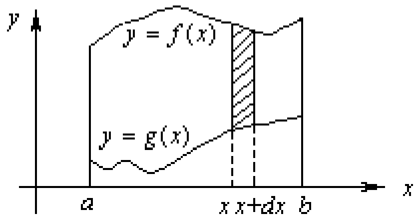

图 3.4.1

从而

$$A=\int_a^b|f(x)-g(x)|dx。$$

例 3.4.1 求由抛物线 $y=x^2$ 及直线 $y=3x$ 所围图形的面积（图 3.4.2）。

解 先求出两曲线交点为 $(0,0)$ 和 $(3,9)$。如果以 x 为积分变量，取积分区间为 $[0,3]$，有

$$A=\int_0^3(3x-x^2)dx=\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_0^3=\frac{9}{2}。$$

如果以 y 为积分变量，则应取积分区间为 $[0,9]$，此时

$$A=\int_0^9\left(\sqrt{y}-\frac{y}{3}\right)dy$$

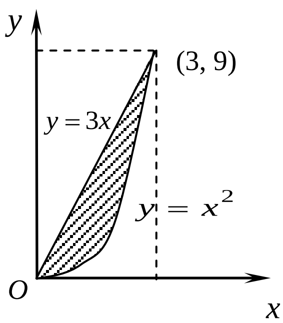

图 3.4.2

$$=\left(\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}-\frac{y^2}{3\cdot 2}\right)\Bigg|_0^9=\frac{9}{2}\text{。}$$

三．面积问题（极坐标下的区域）

考察介于曲线$r=r(\theta)$与射线$\theta=\alpha$和$\theta=\beta$（$0\le\alpha<\beta\le 2\pi$）间的曲边扇形的面积，其中$r(\theta)$是连续函数（图 3.4.3）。

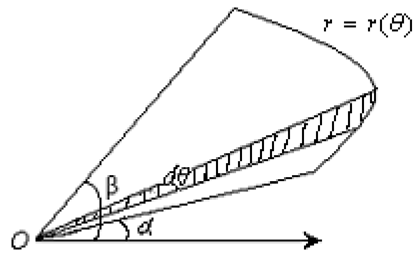

图 3.4.3

以θ为积分变量，在区间微元$[\theta,\theta+d\theta]$上对应的小曲边扇形的面积近似于圆扇形的面积，即$\Delta A\approx\frac{1}{2}[r(\theta)]^2d\theta$，所以面积微元

$$dA=\frac{1}{2}[r(\theta)]^2d\theta\text{，}$$

于是

$$A=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta[r(\theta)]^2d\theta\text{。}$$

例 3.4.2 计算心脏线$r=a(1+\cos\theta)$（$-\pi\le\theta\le\pi$）所围区域的面积（图 3.4.4）。

解 由图形的对称性，只要计算该图形的上半部分的面积，其两倍便是所求图形的面积。由面积计算公式得

$$A=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^\pi a^2(1+\cos\theta)^2d\theta$$

$$=4a^2\int_0^\pi\cos^4\frac{\theta}{2}d\theta$$

$$=8a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta$$

$$=8a^2\cdot\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{2}\pi a^2\text{。}$$

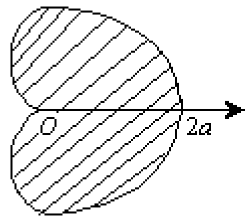

图 3.4.4

四．已知平行截面面积求体积

设空间立体Ω介于过$x=a$和$x=b$点且垂直于x轴的两平面之间，已知它被过x点且垂直于x轴的平面所截出的图形的面积为$A(x)$（图 3.4.5）。显然，在区间微元$[x,x+dx]$上，Ω的体积微元为一母线与x轴平行、高为dx，底面积为$A(x)$的柱体体积，即

$$dV=A(x)dx\text{，}$$

所以

$$V=\int_a^bA(x)dx\text{。}$$

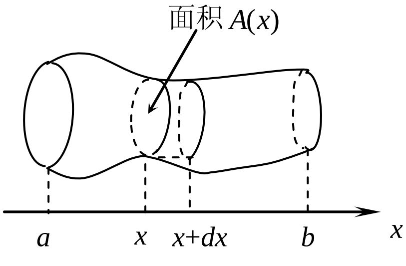

图 3.4.5

例 3.4.3 已知一直圆柱体的底面半径为R，一斜面π_1过其底面圆周上一点，且与底面π_2成夹角θ，求圆柱被π_1，π_2所截得部分的体积。

解 取圆柱底面圆周中心为原点，底面π_2为xy平面，π_1与圆周交点在y轴上（图 3.4.6）。这样，对

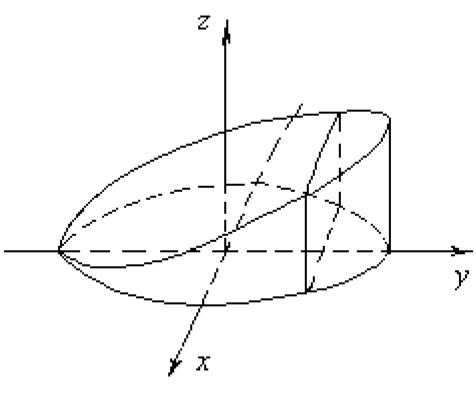

图 3.4.6

$y \in [-R, R]$，过 $(0, y, 0)$ 且与 y 轴垂直的平面与圆柱被截部分的截面是一个矩形，它的底为 $2\sqrt{R^2 - y^2}$，高为 $(y + R)\tan\theta$。因此

$$A(y) = 2\sqrt{R^2 - y^2}(y + R)\tan\theta$$

所求体积为

$$V = 2\tan\theta\left(\int_{-R}^{R} y\sqrt{R^2 - y^2}\,dy + R\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2 - y^2}\,dy\right)。$$

括号中第一项是一个奇函数在对称区间上的积分，其值为 0；第二项的积分恰为半径为 R 的上半个圆的面积，因此

$$V = \pi R^3 \tan\theta。$$

读者不难发现，如用与 x 轴垂直的平面与之相截,截面是直角梯形，用与 z 轴垂直的平面与之相截，截面则是弓形，处理都会繁复一些。因而应对不同问题作具体分析，寻求事半功倍的最佳方案。

五．旋转体的体积

由已知平行截面面积计算体积的公式有一个直接的推论，这就是求旋转体体积的公式。

设空间立体 Ω 为由平面图形

$$\{(x, y) \mid 0 \le y \le f(x), \quad a \le x \le b\}$$

绕 x 轴旋转一周而成的**旋转体**（图 3.4.7）。如用在点 $(x, 0)$ 处与 x 轴垂直的平面截此立体，所得截面显然是一个半径为 $f(x)$ 的圆，即截面积为

$$A(x) = \pi[f(x)]^2。$$

因此

$$V = \pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx。$$

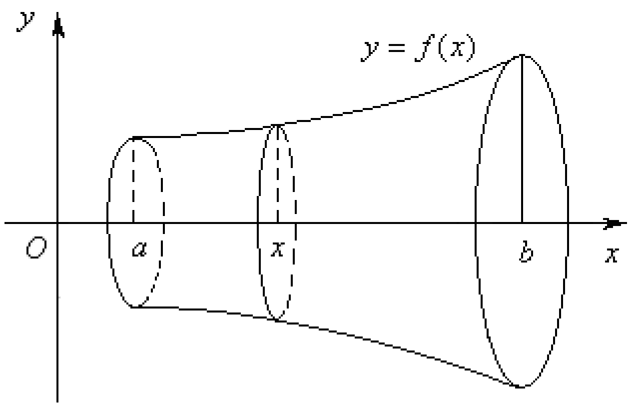

图 3.4.7

例 3.4.4 求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 所围图形绕 x 轴旋转一周所得椭球的体积。

解 由于 $y = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$，利用对称性可得

$$V=2\pi\int_0^a y^2dx=2\pi\frac{b^2}{a^2}\int_0^a(a^2-x^2)dx$$
$$=\frac{2\pi b^2}{a^2}\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)\bigg|_0^a=\frac{4}{3}\pi ab^2\text{。}$$

当 $a=b$ 时，就得到以 a 为半径的球体积为 $\frac{4}{3}\pi a^3$。

六．曲线的弧长

设有曲线 L 的方程为 $y=f(x)$（$a\le x\le b$），其中 f 具有连续导数。今欲求其弧长 s（图 3.4.8）。

用微元法。设区间微元 $[x,x+dx]$ 对应于小弧段 PQ，该弧段之长 Δs 可用它在 P 处切线段 PT 的长度来近似，即

$$\Delta s\approx ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$$
$$=\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx\text{。}$$

于是曲线 L 的弧长为

$$s=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx\text{。}$$

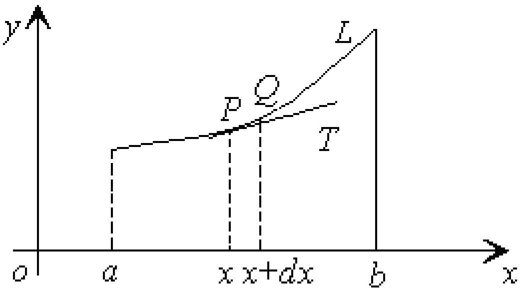

图 3.4.8

当弧 L 用参数方程

$$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}\quad \alpha\le t\le\beta$$

表示时，$dx=x'(t)dt$，$dy=y'(t)dt$。从而

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt\text{，}$$

进而

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt\text{。}$$

当曲线 L 用极坐标方程

$$r=r(\theta)\text{，}\qquad \alpha\le\theta\le\beta$$

表示时，由于

$$\begin{cases}x=r(\theta)\cos\theta,\\ y=r(\theta)\sin\theta,\end{cases}$$

便得 $dx=(r'\cos\theta-r\sin\theta)d\theta$，$dy=(r'\sin\theta+r\cos\theta)d\theta$，从而

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{r^2+r'^2}d\theta\text{，}$$

进而

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2+r'^2}d\theta\text{。}$$

例 3.4.5 求曲线段 $y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$（$1\le x\le 3$）的弧长。

解 由 $ds=\sqrt{1+(y')^2}dx=\sqrt{1+x}dx$ 得

$$s=\int_1^3\sqrt{1+x}dx=\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^3=\frac{2}{3}(8-2\sqrt{2})\text{。}$$

例 3.4.6 求心脏线 $r=a(1+\cos\theta)$ 的周长，其中 $a>0$。

解 由对称性

$$s=2\int_0^\pi\sqrt{r^2+(r')^2}d\theta=2\int_0^\pi a\sqrt{2+2\cos\theta}d\theta$$

$$=4a\int_0^\pi\cos\frac{\theta}{2}d\theta=8a\sin\frac{\theta}{2}\Big|_0^\pi=8a\text{。}$$

例 3.4.7 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的周长。

解 椭圆的参数方程为

$$\begin{cases}x=a\cos\theta,\\y=b\sin\theta,\end{cases}\qquad 0\le\theta\le 2\pi\text{。}$$

由对称性，其周长等于它落在第一象限部分的 4 倍，故

$$s=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}d\theta=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\theta}d\theta\text{，}$$

其中 $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ 为椭圆的离心率。

椭圆周长表达式中出现的积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\theta}d\theta$（$0<\varepsilon<1$）称为**第二类椭圆积分**。由于被积函数 $\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\theta}$ 的原函数不能用初等函数来表示，因而椭圆周长必须用数值积分的方法计算。

七．旋转曲面的面积

设曲线 L 的方程为

$$y=f(x),\qquad a\le x\le b\text{。}$$

L 绕 x 轴旋转一周得一**旋转曲面**。下面来导出计算该旋转曲面面积 A 的公式。设 f 具有连续导数，且为叙述方便，设 f 为非负函数。

在 $[a,b]$ 中考察区间微元 $[x,x+dx]$。在该区间微元上用切线段 PT 代替原来的弧段 PQ（图 3.4.9）用 PT 绕 x 轴旋转一周所得的圆台侧面积近似替代弧 PQ 旋转而得的曲面面积，此圆台的上、下底半径分别为 $f(x)$，$f(x)+f'(x)dx$，侧棱长为 $ds=\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$。略去高阶无穷小，即有

$$\Delta A\approx\pi\{f(x)+[f(x)+f'(x)dx]\}ds\approx 2\pi\ f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx\text{。}$$

即 $dA=2\pi f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$。因此，

$$A=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx\text{。}$$

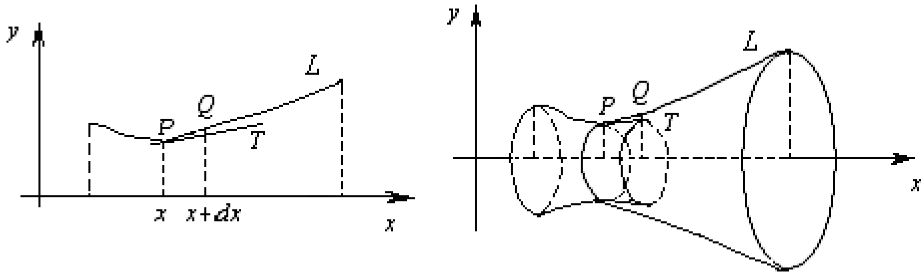

图 3.4.9

当曲线 L 用参数方程

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \qquad \alpha \le t \le \beta$$

表示时，易知

$$A = 2\pi\int_{\alpha}^{\beta} y(t)\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt。$$

例 3.4.8 求半径为 a 的球面面积。

解 球面可视为上半圆周 $y = \sqrt{a^2 - x^2}$（$-a \le x \le a$）绕 x 轴旋转一周所得的旋转面。记 $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$，即有

$$\begin{aligned} A &= \int_{-a}^{a} 2\pi f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx \\ &= \int_{-1}^{a} 2\pi\sqrt{a^2 - x^2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}}\,dx \\ &= 2\pi\int_{-a}^{a} a\,dx = 4\pi a^2。\end{aligned}$$

例 3.4.9 求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$（$a > b > 0$）绕 x 轴旋转一周所得椭球面的面积。

解 利用椭圆的参数方程

$$\begin{cases} x = a\cos\theta, \\ y = b\sin\theta, \end{cases} \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$

即得

$$\begin{aligned} A &= 2\pi\int_0^{\pi} (b\sin\theta)\sqrt{(-a\sin\theta)^2 + (b\cos\theta)^2}\,d\theta \\ &= 2\pi ab\int_0^{\pi} \sin\theta\sqrt{1 - \varepsilon^2\cos^2\theta}\,d\theta \\ &= -2\pi ab\int_1^{-1} \sqrt{1 - \varepsilon^2 t^2}\,dt = 4\pi ab\int_0^1 \sqrt{1 - \varepsilon^2 t^2}\,dt \\ &= 4\pi ab \cdot \frac{1}{2\varepsilon}[\varepsilon t\sqrt{1 - \varepsilon^2 t^2} + \arcsin\varepsilon t]\Big|_0^1 \\ &= 2\pi ab\left(\sqrt{1 - \varepsilon^2} + \frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}\right), \end{aligned}$$

其中 $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$。当 $b \to a$，即 $\varepsilon \to 0$ 时，$f \to 4\pi a^2$，便回到了上一个例子的情况。

八．曲线的曲率

在几何学和许多实际问题中，常常需要考虑曲线的弯曲程度。例如在铁路设计时，在拐弯处就不能让其弯曲程度太大，否则火车在行进时就会出现危险。现将借助于前面对弧长及弧长微分的讨论，引入一个刻画曲线弯曲程度的量。

考察如图 3.4.10 所示的光滑曲线 L 上的曲线段 $\overset{\frown}{AB}$，它的弧长记为 Δs。当动点从 A 点沿曲线段 $\overset{\frown}{AB}$ 运动到 B 点时，A 点的切线 τ_A 也随着转动到 B 点的切线 τ_B，记这两条切线之间的夹角为 $\Delta\varphi$（它等于 τ_B 和 x 轴的交角与 τ_A 和 x 轴的交角之差）。显然，当弧的长度相同时，切线间的夹角愈大，曲线的弯曲程度就愈大；而当切线间的夹角相同时，弧的长度愈小，曲线的弯曲程度就愈大。于是，我们定义

$$\overline{K} = \left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|$$

为曲线段 $\overset{\frown}{AB}$ 的**平均曲率**，它刻画了曲线段 $\overset{\frown}{AB}$ 的平均弯曲程度。平均曲率只描写了曲线 L 在这一段的“平均弯曲程度”。B 越接近于 A，即 Δs 越小，$\overset{\frown}{AB}$ 弧的平均曲率就能越能精确刻画曲线 L 在 A 处的弯曲程度，因此定义

$$K = \left|\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right| = \left|\frac{d\varphi}{ds}\right|$$

为曲线 L 在 A 点的**曲率**（如果该式中的极限存在的话）。这里取绝对值是为了使曲率不为负数。

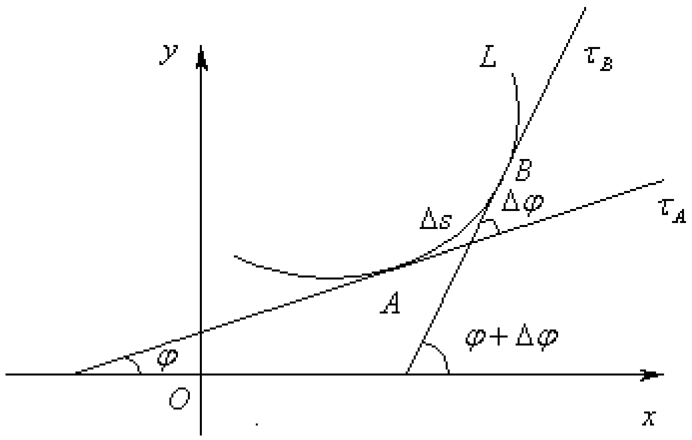

图 3.4.10

设曲线 L 在 A 点处的曲率 $K \neq 0$，若过 A 点作一个半径为 $\frac{1}{K}$ 的圆，使它在 A 点处与曲线 L 有相同的切线，并在 A 点附近与该曲线位于切线的同侧（图 3.4.11）．我们把这个圆称为曲线 L 在 A 点处的**曲率圆**或**密切圆**。曲率圆的半径 $R = \frac{1}{K}$ 和圆心 A_0 分别称为曲线 L 在 A 点处的**曲率半径**和**曲率中心**。由曲率圆的定义可以知道，曲线 L 在点 A 处与曲率圆既有相同的切线，又有相同的曲率和凸性。因此在实际应用中，常用曲线在一点处的曲率圆上的小弧段来近似代替该点附近的曲线段，以使问题简化。

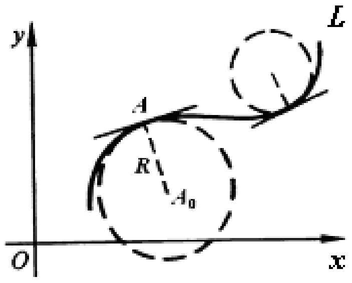

图 3.4.11

下面来推导曲率的计算公式。设光滑曲线 L 由参数方程

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta$$

确定，且 $x(t), y(t)$ 有二阶导数。对于每个 $t \in [\alpha, \beta]$，曲线在对应点的切线斜率为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \tan\varphi,$$

其中 φ 是该切线与 x 轴的夹角，由 $\varphi = \arctan\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$ ，即可得到

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{x'^2(t) + y'^2(t)}。$$

另外，由弧长的微分公式知 $\dfrac{ds}{dt} = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}$ ，于是

$$K = \left|\frac{d\varphi}{ds}\right| = \left|\frac{\frac{d\varphi}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right| = \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{\left(x'^2(t) + y'^2(t)\right)^{\frac{3}{2}}}。$$

这就是曲率的计算公式。

特别地，如果曲线 L 由 $y = y(x)$ 表示，且 $y(x)$ 有二阶导数，那么相应的计算公式为

$$K = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}。$$

容易知道，直线上曲率处处为零。

例 3.4.10 求悬链线

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

的曲率（$a > 0$）。

解 易知

$$y' = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right), \quad y'' = \frac{1}{2a}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = \frac{y}{a^2}。$$

由于 $y > 0$ 及

$$\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)^2} = \frac{y}{a},$$

所以

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\left|\frac{y}{a^2}\right|\Big/\left(\frac{y}{a}\right)^3=\frac{a}{y^2}=\frac{4}{a\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)^2}\text{。}$$

例 3.4.11 求椭圆$x=a\cos t$，$y=b\sin t$（$0\le t\le 2\pi$）上曲率最大和最小的点（$0<b\le a$）。

解 由于

$$x'=-a\sin t\text{，}\quad x''=-a\cos t\text{，}\quad y'=b\cos t\text{，}\quad y''=-b\sin t\text{，}$$

因此

$$K=\frac{|x'y''-x''y'|}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{|ab\sin^2 t+ab\cos^2 t|}{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^{3/2}}=\frac{ab}{\left[(a^2-b^2)\sin^2 t+b^2\right]^{3/2}}\text{。}$$

因此当$a>b>0$时，椭圆上在$t=0,\pi$对应的点，即长轴的两个端点，曲率最大；在$t=\frac{\pi}{2}$，$\frac{3\pi}{2}$对应的点，即短轴的两个端点，曲率最小。

当$a=b=R$时（这时椭圆成为半径为R的圆），$K=1/R$。这说明：圆上各点处的曲率相同，其值为圆半径的倒数，而曲率半径正好是R。

注 在上例中，曲率的最大值为$\frac{a}{b^2}$，此时曲率半径为$\frac{b^2}{a}$。这有一个有趣的应用：半径为$\frac{b^2}{a}$的圆是最大的圆，当它沿椭圆内侧滚动一周时，与椭圆的每一点都接触。

九．习　　题

1；2；4；5；6；7；8；10；11；13；14.（1）、（3）、（5）；15.（1）、（3）；16.（1）、（2）；17.（1）、（2）、（4）。