教　案

平面和直线

教学内容

平面和直线是几何学中最基本的研究对象，是一些向量空间和几何空间中某些对象的最基本原型。由于曲线在局部可以用它的切线来近似，曲面在局部可以用它的切平面来近似，所以平面和直线也是几何和分析中“以直代曲”的最基本元素。因此学习空间解析几何中处理平面与直线的方法非常重要，而且是必须要掌握的数学工具。在本节中主要讲解以下几方面的内容：

（1）平面和直线的代数表示，即它们的方程的形式如何？以及如何用向量的运算方法来建立这些方程；

（2）平面与平面，平面与直线、直线与直线，以及点与这些对象的位置关系，如距离、夹角等，以及如何利用代数方法来处理。

教学思路和要求

（1）首先讲解平面的方程、直线的方程、以及建立这些方程的方法。

（2）讲解点与平面的距离、点与直线的距离公式的建立和运用。

（3）讲解平面与平面，平面与直线、直线与直线的夹角概念与计算方法；

（4）进一步，利用这些工具讲解一些具有某些特性的直线或平面的方程的具体计算方法。

教学安排

一.　平面方程的几种形式

在 $\mathbf{R}^3$ 中，给定了与平面垂直的方向和平面上的一个点，就可以唯一决定这个平面。

与平面垂直的方向称为这个平面的**法向量**。设所求平面 π 的法向量为 $\boldsymbol{n}(A, B, C)$，而且平面过点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$。对平面 π 上的任何一点 $P(x, y, z)$，P 与 P_0 的连线依然在平面上，因而 $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ 与 $\boldsymbol{n}$ 垂直，即

$$\boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0。$$

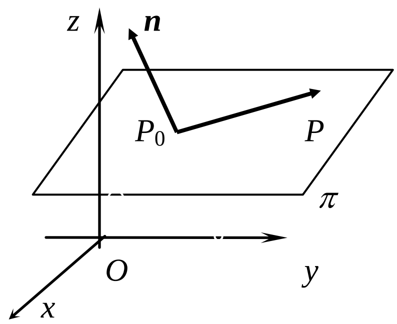

图 6.2.1

用分量表示，就是

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0，$$

这个关系式称为平面的**点法式方程**。

记常数 $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$，则上述方程可以写成

$$Ax + By + Cz + D = 0，$$

这个关系式称为平面的**一般方程**。

例 6.2.1　求过原点 $O(0, 0, 0)$ 和点 $P(6, -3, 2)$，且与平面 $4x - y + 2z = 8$ 垂直的平面方程。

解　记所求平面为 π。因为 π 过原点 $O(0, 0, 0)$ 和点 $P(6, -3, 2)$，所以其法向量 $\boldsymbol{n}$ 应与 $\overrightarrow{OP} = (6, -3, 2)$ 垂直。又 π 垂直于平面 $4x - y + 2z = 8$，所以 $\boldsymbol{n}$ 应与向量

$\boldsymbol{n}_1 = (4, -1, 2)$ 垂直。故可取

$$\boldsymbol{n} = \overrightarrow{OP} \times \boldsymbol{n}_1 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 6 & -3 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -4\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k} \text{。}$$

利用平面的点法式方程，所求平面方程为

$$-4x - 4y + 6z = 0,$$

即

$$2x + 2y - 3z = 0 \text{。}$$

确定平面的另一类条件是，不在一条直线上的 3 个点唯一决定一张平面。设平面 π 所过的 3 个点为 $P_0(x_0, y_0, z_0)$，$P_1(x_1, y_1, z_1)$，$P_2(x_2, y_2, z_2)$，因此 $\overrightarrow{P_0P_1}$ 和 $\overrightarrow{P_0P_2}$ 与平面的法向量 $\boldsymbol{n}$ 垂直，即可以取法向量

$$\boldsymbol{n} = \overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_0P_2},$$

设 $P(x，y，z)$是平面上的任何一点，则有

$$\boldsymbol{n} \cdot P_0P = (\overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_0P_2}) \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0 \text{。}$$

这称为平面的**三点式方程**。容易看出，它正好就是四点共面的条件

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0 \text{。}$$

由行列式的性质，上式展开后一定是

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

形式，因此实际计算时不必死记公式，可以将 P_0，P_1，P_2 的坐标直接代入平面的一般式方程，用待定系数法解出 A，B，C，D。

特别地，将平面所过的 3 个点取为过坐标轴的点 $P_0(a，0，0)$，$P_1(0，b，0)$，$P_2(0，0，c)$，代入三点式方程，就有

$$\begin{vmatrix} x - a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0,$$

展开整理后，得

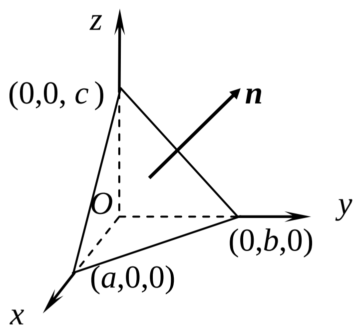

图 6.2.2

（1）当 a、b、c 均不为 0 时，平面方程为

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

它称为平面的**截距式方程**（见图 6.2.2），其中 a，b，c 依次称为该平面在 x，y，z 轴上的**截距**。此时平面的法向为

$$\boldsymbol{n} = \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right) \text{。}$$

（2）当 a，b，c 中只有一个为 0 时，所决定的平面是坐标平面，

$$\text{当} a = 0 \text{时，就是} Oyz \text{平面} \quad x = 0;$$
$$\text{当} b = 0 \text{时，就是} Ozx \text{平面} \quad y = 0;$$
$$\text{当} c = 0 \text{时，就是} Oxy \text{平面} \quad z = 0.$$

例 6.2.2 求过点 $(3,2,1)$，$(0,1,0)$，$(-1,0,2)$ 的平面方程。

解 将三点的坐标代入平面的一般方程

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

得到关于 A、B、C、D 的方程组

$$\begin{cases} 3A+2B+C+D=0, \\ \qquad B \qquad +D=0, \\ -A \qquad +2C+D=0. \end{cases}$$

它的一组解为 $A=3$，$B=-7$，$C=-2$，$D=7$（此方程组有无穷多个解，只取一个解就可以了），于是所求的平面方程为

$$3x-7y-2z+7=0。$$

二．直线方程的几种形式

与平面类似，要确定空间中的一条直线，主要条件也有两类。一类是确定直线的方向和直线上的一个点，另一类是确定直线上的两个点。

设直线 L 的方向向量为 $\boldsymbol{v}(l,m,n)$，它过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$。于是，直线 L 上任何一点 $P(x,y,z)$ 与 P_0 的连线与 $\boldsymbol{v}$ 平行，即 $\overrightarrow{P_0P}/\!/\boldsymbol{v}$（见图 6.2.3)，按分量写开，就是

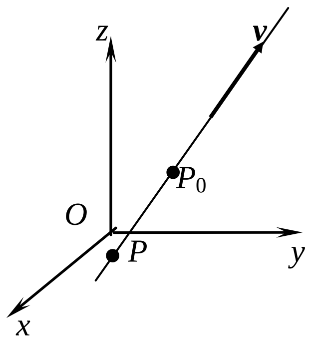

图 6.2.3

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n},$$

它称为直线的**对称式方程**或**点向式方程**。

注意，若 l，m，n 中有等于 0 的，例如，当 $l=0$，$m,n\neq 0$ 时，则应将上述方程理解为

$$\begin{cases} x=x_0, \\ \dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}. \end{cases}$$

当 $l=m=0$，$n\neq 0$ 时，则应将上述方程理解为

$$\begin{cases} x=x_0, \\ y=y_0. \end{cases}$$

例 6.2.3 求过点 $(2,1,-4)$，方向向量为 $(3,-1,1)$ 的直线方程。

解 直接代入直线的对称式方程，便得所求的直线方程为

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+4}{1}。$$

若给定了直线上的两个点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 和 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，则 $\overrightarrow{P_0P_1}$ 的方向就是 $\boldsymbol{v}$ 的方向向量（见图 6.2.4)，代入直线的对称式方程，即得到直线的**两点式方程**

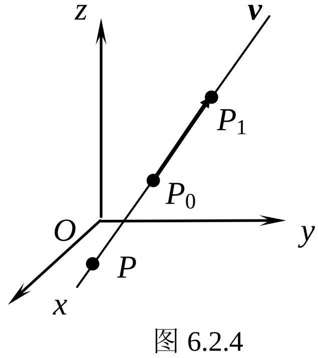

图 6.2.4

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\text{。}$$

若在直线的对称式方程中记$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}=t$，将等式写开，便得到

$$\begin{cases} x=x_0+t\,l, \\ y=y_0+t\,m, \\ z=z_0+t\,n, \end{cases}$$

它称为直线的**参数方程**，其中 t 是参数。

参数方程对于求解某些具体问题很有效。

例 6.2.4 求直线$\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{2}$与平面$2x+y+z-6=0$的交点。

解 这就是求方程$\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{2}$与$2x+y+z-6=0$的公共解。

将直线方程写成参数方程

$$\begin{cases} x=2+t, \\ y=3+t, \\ z=4+2t, \end{cases}$$

其中 t 是参数。代入平面的方程，便得到

$$2\,(2+t)+(3+t)+(4+2\,t)-6=0,$$

解得 $t=-1$。代入直线的参数方程，得到$x=1,\ y=2,\ z=2$。即，交点为$(1, 2, 2)$。

另外，如果给定了空间中两张互不平行的平面π_1：$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 和π_2： $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$，那么这两张平面交于一条直线。也就是说，这两个平面的联立方程

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

同样表示一条直线，它称为直线的**一般方程**。

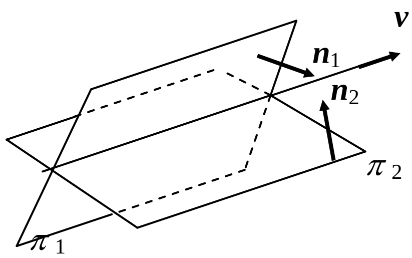

图 6.2.5

直线的一般方程看起来不太直观，用起来有时也不太方便。由于π_1的法向量为$\boldsymbol{n}_1(A_1,B_1,C_1)$， π_2的法向量为$\boldsymbol{n}_2(A_2,B_2,C_2)$，由立体几何知识，直线的方向向量$\boldsymbol{v}$与$\boldsymbol{n}_1$和$\boldsymbol{n}_2$ 都垂直（见图 6.2.5），因此，可以取

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2\ ,$$

再从联立方程中求出一组解(x_0,y_0,z_0)，也就是直线上的一个定点的坐标，这样就可以将它化成对称式方程了。

例 6.2.5 将直线的一般方程

$$\begin{cases} 2x+y-z+1=0, \\ x\quad\ +2z+4=0 \end{cases}$$

化成对称式方程。

解 取直线的方向向量为

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}=2\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k},$$

再在平面上任意取一个公共点，如令 $x_0=0$，代入方程，

$$\begin{cases} y-z+1=0,\\ 2z+4=0\end{cases}$$

则可以解出 $y_0=-3$， $z_0=-2$。

于是，直线的对称式方程为

$$\frac{x}{2}=\frac{y+3}{-5}=\frac{z+2}{-1}。$$

例 6.2.6 求过点 $M_0(0,0,-2)$，与直线 L_1：

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z}{1}$$

相交，而且平行于平面 π_1：

$$3x-y+2z-1=0$$

的直线方程。

解 设所求直线为 L。其方向向量为 $\boldsymbol{v}(X,Y,Z)$。显然 $M_1(1,3,0)$ 是直线 L_1 上的点，$\boldsymbol{v}_1(4,-2,1)$ 是 L_1 的方向向量。由于 L 过点 $M_0(0,0,-2)$，且与直线 L_1 相交，因此向量 $\overrightarrow{M_0M_1}$， $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}$ 共面，因此 $(\overrightarrow{M_0M_1}\times\boldsymbol{v}_1)\cdot\boldsymbol{v}=0$，这就是说

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z\\ 1-0 & 3-0 & 0-(-2)\\ 4 & -2 & 1\end{vmatrix}=0,$$

即

$$X+Y-2Z=0。$$

又因为 L 与平面 π_1 平行，所以 $\boldsymbol{v}(X,Y,Z)$ 与 π_1 的法向量 $\boldsymbol{n}(3,-1,2)$ 垂直，因此 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}=0$，即

$$3X-Y+2Z=0。$$

联立上述各方程可解得 $X=0,Y=2Z$，取 $Z=1$ 得 $Y=2$。因此直线 L 的方程为

$$\frac{x}{0}=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{1},$$

即

$$\begin{cases} y=2z+4,\\ x=0.\end{cases}$$

本例也可先求过 M_0 且平行于 π_1 的平面 π_2 的方程，再求 π_2 与直线 L_1 的交点 M_1，最后求出过 M_0 和 M_1 的直线方程。读者不妨自行计算。

三．**平面束**

空间直线 L 的一般方程为

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.\end{cases}$$

对于任意一组不同时为零的常数 λ,μ，方程

$$\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$
表示一张平面$\pi_{\lambda\mu}$。显然，满足L的一般方程的点(x,y,z)一定满足平面$\pi_{\lambda\mu}$的方程，所以平面$\pi_{\lambda\mu}$通过直线L。于是，对于不同的不同时为零的数对λ,μ，
$$\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$
就确定了一族通过L的平面，它称为通过L的平面的**平面束**，以上方程也称为通过L的**平面束方程**。

显然确定平面束中一张平面，只要确定λ与μ的比值，因此也常将通过L的平面束方程写成
$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+k(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$
（注意这个束中不包含平面$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$），或
$$k(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$
（注意这个束中不包含平面$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$）。

另外，方程
$$Ax+By+Cz+\lambda=0$$
确定一张平面π_λ，而当λ取不同值时，就得到一族相互平行的平面的方程。因此上式也称为**平行平面束方程**。

例 6.2.7 过点$(1,1,1)$和直线L：$\begin{cases}3x-y+2z+2=0,\\ x-2y+3z-5=0\end{cases}$的平面方程。

解 设所求通过L的平面方程为
$$3x-y+2z+2+k(x-2y+3z-5)=0。$$
它通过$(1,1,1)$点，所以将该点的坐标代入上式得
$$6-3k=0。$$
所以$k=2$。于是，所求的平面方程为
$$3x-y+2z+2+2(x-2y+3z-5)=0，$$
即
$$5x-5y+8z-8=0。$$

四．点到平面、直线的距离

平面解析几何中讨论了某一平面上的点到直线的距离问题，现在我们将它推广到空间。

先考虑点到平面的距离。设平面方程为
$$Ax+By+Cz+D=0。$$
过空间一已知点$P(x^*,y^*,z^*)$作平面的垂线， 显然，垂线的方向就是平面的法向量$\boldsymbol{n}(A,B,C)$。取平面上一定点P_0(x_0,y_0,z_0)，联结P与P_0，则$P(x^*,y^*,z^*)$到平面的距离d就是$\overrightarrow{P_0P}$在$\boldsymbol{n}$方向的投影长度（见图 6.2.6）。记平面的单位法向量
$$\boldsymbol{n}_0=\frac{\boldsymbol{n}}{\|\boldsymbol{n}\|}，$$
由内积的定义，得
$$d=|\overrightarrow{P_0P}\cdot\boldsymbol{n}_0|，$$

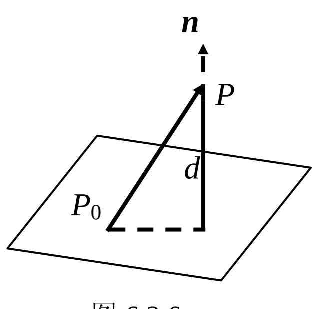

图 6.2.6

用分量表示，就是

$$d=\frac{|A(x^*-x_0)+B(y^*-y_0)+C(z^*-z_0)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

由于

$$D=-(Ax_0+By_0+Cz_0),$$

因此

$$d=\frac{|Ax^*+By^*+Cz^*+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

这就是点 $P(x^*,y^*,z^*)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离的计算公式。当 $P(x^*,y^*,z^*)$ 在该平面上时，显然有 $d=0$ 。

例 6.2.8 求点 $(2,1,-1)$ 与平面 $2x-3y-6z+1=0$ 的距离。

解 这时 $P=(2,1,-1)$，$(A,B,C)=(2,-3,-6)$，由点到平面距离的计算公式得

$$d=\frac{|2\times2+(-3)\times1+(-6)\times(-1)+1|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+(-6)^2}}=\frac{8}{7}。$$

再考虑点到直线的距离。设直线 L 的方程为

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n},$$

连接空间一已知点 $P(x^*,y^*,z^*)$ 和直线 L 上的点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$。直线的方向向量为 $\boldsymbol{v}(l,m,n)$，因此单位方向向量为 $\boldsymbol{v}_0=\dfrac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}$。由图 6.2.7 中可以看出，点 P 到直线的距离 d 是以 $\overrightarrow{P_0P}$ 和 $\boldsymbol{v}_0$ 为邻边的平行四边形的底边 $\boldsymbol{v}_0$ 上的高，由外积的几何意义，图 6.2.7 中的平行四边形的面积

$$S=d\|\boldsymbol{v}_0\|=\|\overrightarrow{P_0P}\times\boldsymbol{v}_0\|,$$

于是点 $P(x^*,y^*,z^*)$ 到直线的距离公式为

$$d=\|\overrightarrow{P_0P}\times\boldsymbol{v}_0\|。$$

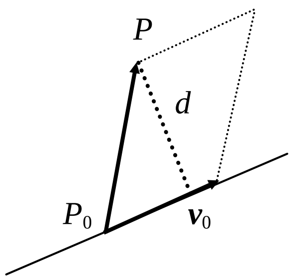

图 6.2.7

例 6.2.9 求点 $(5,-2,3)$ 与直线 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{3}$ 的距离。

解 这时 $P=(5,-2,3)$，$P_0=(1,-1,0)$，则

$$\overrightarrow{P_0P}=(5,-2,3)-(1,-1,0)=(4,-1,3)。$$

而 $\boldsymbol{v}=(1,2,3)$，$\boldsymbol{v}_0=\dfrac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}=\dfrac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3)$，因此

$$\overrightarrow{P_0P}\times\boldsymbol{v}_0=\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\4&-1&3\\1&2&3\end{vmatrix}=-\frac{9}{\sqrt{14}}(1,1,-1),$$

所以距离为

$$\|d=\|\overrightarrow{P_0P}\times\boldsymbol{v}_0\|=\frac{9\sqrt{3}}{\sqrt{14}}。$$

五．交角

一．平面与平面的交角

空间中两张平面的交角就是它们的法向量的交角θ（通常取$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$）。因此，设两张平面的方程为

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$$

和

$$A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0,$$

那么它们的交角θ就是它们的法向量$\boldsymbol{n}_1(A_1, B_1, C_1)$和$\boldsymbol{n}_2(A_2, B_2, C_2)$的交角或补角，即

$$\cos\theta = \frac{|\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2|}{\|\boldsymbol{n}_1\|\|\boldsymbol{n}_2\|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}。$$

特别地，

（1）当$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$时，这两张平面垂直；

（2）当$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \ne \frac{D_1}{D_2}$时，这两张平面平行；

（3）当$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$时，这两张平面重合。

例 6.2.10　求平面$x - y + 2z - 3 = 0$和$2x + y + z + 1 = 0$的夹角。

解　此时$\boldsymbol{n}_1 = (1, -1, 2)$，$\boldsymbol{n}_2 = (2, 1, 1)$，于是由平面与平面交角余弦计算公式得

$$\cos\theta = \frac{|1\times 2 + (-1)\times 1 + 2\times 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{2},$$

因此，这两张平面的夹角为$\theta = \frac{\pi}{3}$。

二．直线与直线的交角

与平面与平面情况类似，空间中两条直线的交角就是它们的方向向量的交角θ（通常取$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$）。设两条直线的方程为

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$$

和

$$\frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2},$$

那么它们的交角θ（$0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$）满足

$$\cos\theta = \frac{|l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}。$$

特别地，

（1）当$l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$时，这两条直线垂直；

（2）当 $\dfrac{l_1}{l_2}=\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}$ 时，这两条直线平行；

（3）若 $\dfrac{l_1}{l_2}=\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}$，且两条直线有一个公共点，则这两条直线重合。

例 6.2.11 求直线 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-4}=\dfrac{z+1}{1}$ 和直线 $\begin{cases}x+y-1=0,\\ y-2z+2=0\end{cases}$ 的夹角。

解　直线 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-4}=\dfrac{z+1}{1}$ 的方向向量可取为 $\boldsymbol{v}_1=(1,-4,1)$；直线 $\begin{cases}x+y-1=0,\\ y-2z+2=0\end{cases}$ 的方向向量可取为

$$\boldsymbol{v}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2\end{vmatrix}=-2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}\text{。}$$

利用直线与直线交角余弦计算公式得

$$\cos\theta=\frac{|1\times(-2)+(-4)\times 2+1\times 1|}{\sqrt{1^2+(-4)^2+1^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+2^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

因此，这两条直线的夹角为 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$。

三．平面与直线的交角

直线与平面的交角是直线与它在平面上的垂直投影所夹的角 θ（通常取 $0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$，见图 6.2.8）。

设平面方程为

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

直线方程为

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n},$$

那么它们的交角 θ（$0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$）满足

$$\sin\theta=|\cos\varphi|=\frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}}\text{。}$$

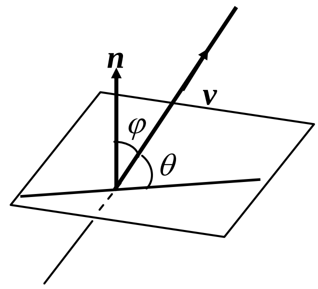

图 6.2.8

特别地，

（1）当 $\dfrac{A}{l}=\dfrac{B}{m}=\dfrac{C}{n}$ 时，平面与直线垂直；

（2）当 $Al+Bm+Cn=0$ 时，平面与直线平行；

（3）若 $Al+Bm+Cn=0$，且平面与直线有一个公共点，则直线属于平面。

例 6.2.12 求平面 $x+y+z-3=0$ 和直线 $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-3}{-4}$ 的位置关系。

解　由于给定直线与平面的夹角的正弦为

$$\sin\theta=\frac{|1\times 3+1\times 1+1\times(-4)|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{3^2+1^2+(-4)^2}}=0,$$

所以平面和直线平行。

在直线 $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-3}{-4}$ 上任取一点，可以就取为 $(2,-2,3)$，它也满足平面方程 $x+y+z-3=0$，所以 $(2,-2,3)$ 也在平面上。因此，直线在平面上。

六．习　　题

1，3.（1）、（3），4.（2），5.（1）、（3），6，7，9，11，13，15.（1）、（2）、（3），16。