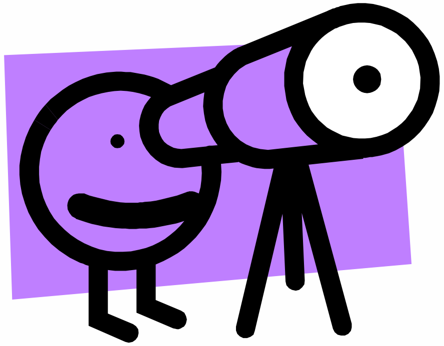
§2 二重积分的计算

重积分计算的基本思想:

化为累次积分, 通过逐次计算定积分, 求得其值。

二重积分计算:

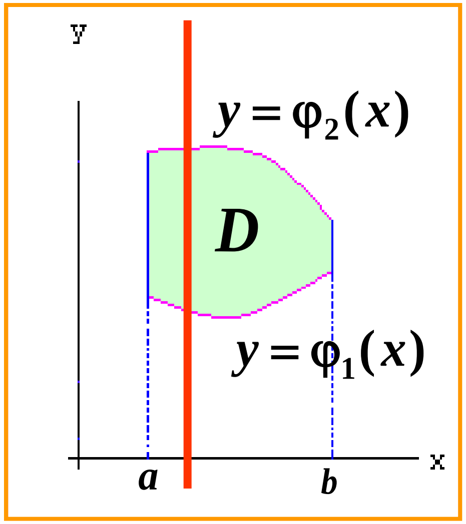
化为二次定积分进行计算, 具体如下:

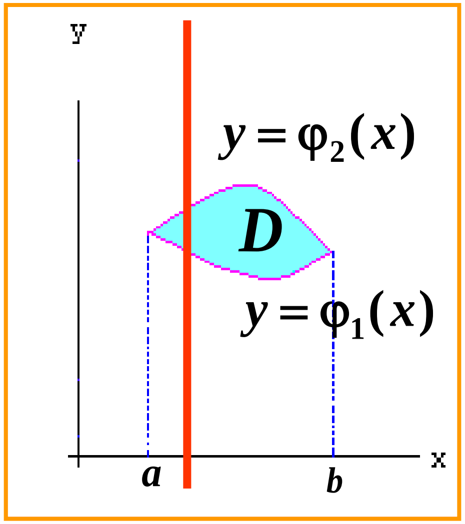


一、直角坐标系下二重积分的计算

1、如果积分区域 D：x — 型区域

$$\{(x,y)\,|\,a\le x\le b,\ \varphi_1(x)\le y\le \varphi_2(x)\}$$



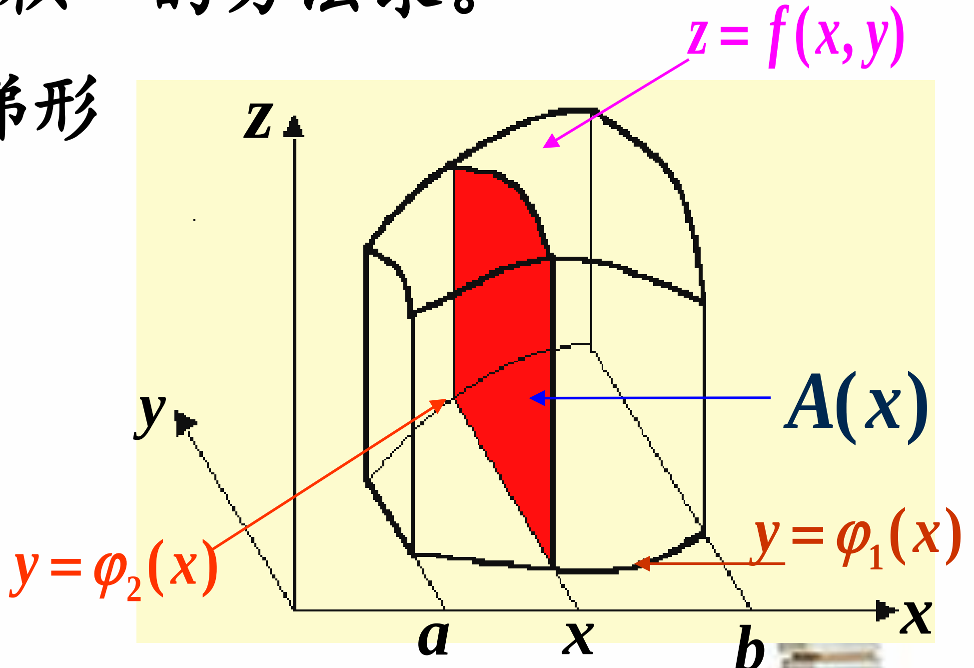


$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x)$ 为区间 $[a,b]$ 上的连续函数，

$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ 的值等于以 D 为底，曲面 $z=f(x,y)$ 为高的曲顶柱体的体积，

用平行于Oyz 的平面截曲顶柱体，应用“已知平行截面面积，求空间区域体积”的方法求。

截面 $A(x)$：是一个曲边梯形



$$A(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

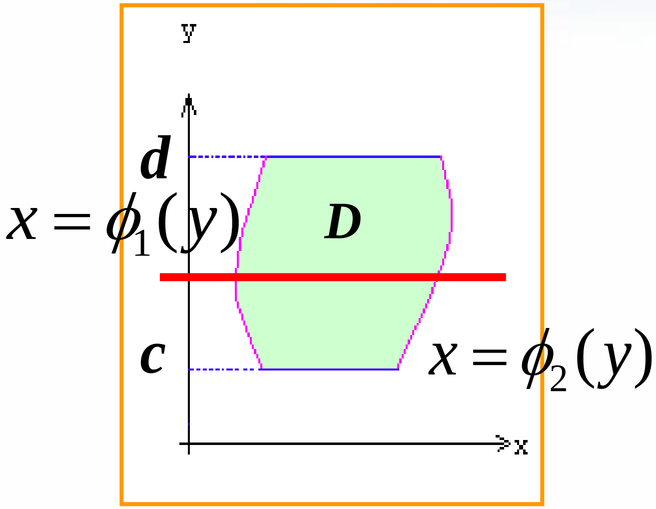
$$\therefore V=\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$$

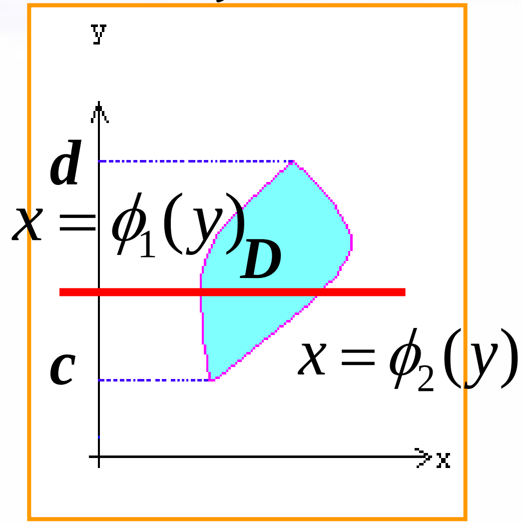
$$=\int_a^b A(x)dx$$

$$=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]dx=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

2、如果积分区域 D：y— 型区域

$$\{(x,y) \mid c \le y \le d,\ \phi_1(y) \le x \le \phi_2(y)\}$$





$\phi_1(x), \phi_2(x)$ 为区间 $[c,d]$ 上的连续函数，

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_c^d dy \int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x,y)dx$$

说明 直角坐标系下：$d\sigma = dxdy$

面积元素

例1、计算 $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}d\sigma$，$D$ 由 $y=x$，$xy=1$，$y=2$ 围成。

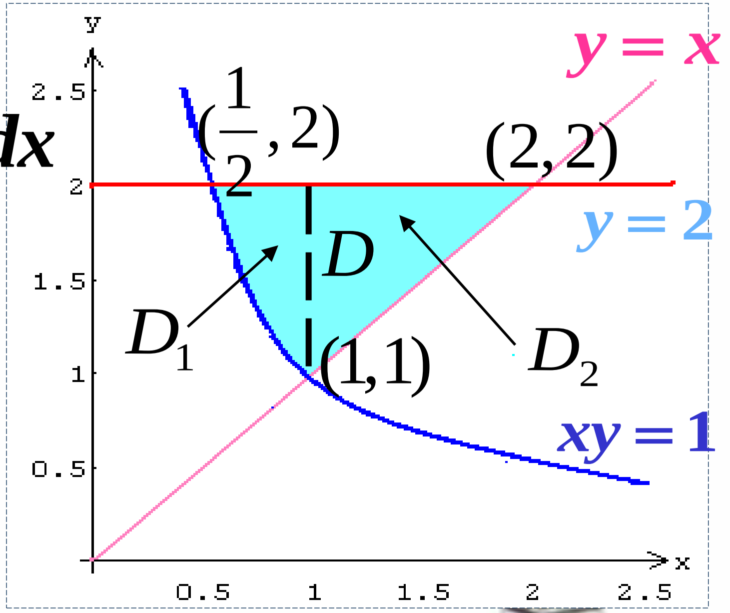
解：1^0 x — 型区域（先对 y 积分后对 x 积分）

$$\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}d\sigma = \int_{\frac{1}{2}}^{1}dx\int_{\frac{1}{x}}^{2}\frac{x^2}{y^2}dy + \int_{1}^{2}dx\int_{x}^{2}\frac{x^2}{y^2}dy$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(-\frac{x^2}{y}\right)\Bigg|_{\frac{1}{x}}^{2} dx + \int_{1}^{2}\left(-\frac{x^2}{y}\right)\Bigg|_{x}^{2} dx$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1}(-\frac{x^2}{2}+x^3)dx + \int_{1}^{2}(-\frac{x^2}{2}+x)dx$$

$$= \frac{27}{64}$$

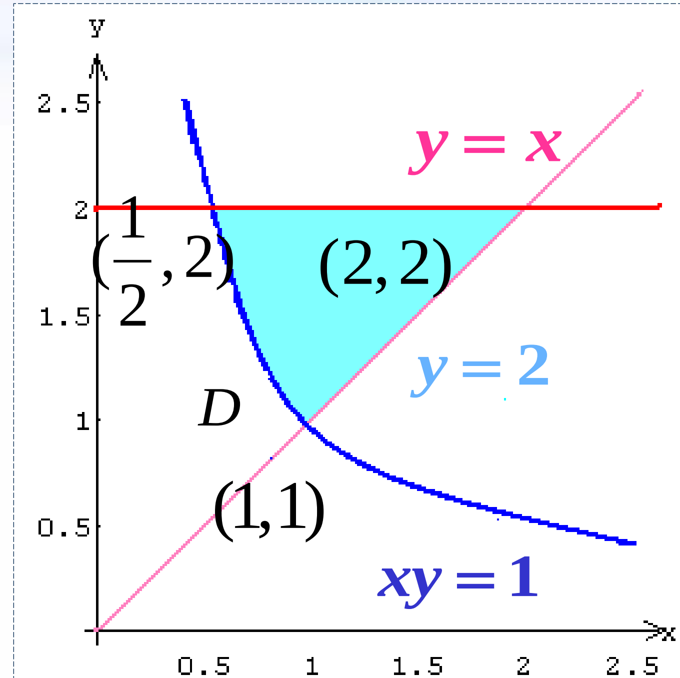


2^0 y— 型区域（先对 x 积分后对 y 积分）

$$\iint_D \frac{x^2}{y^2} d\sigma = \int_1^2 dy \int_{\frac{1}{y}}^{y} \frac{x^2}{y^2} dx$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{x^3}{3y^2} \Bigg|_{\frac{1}{y}}^{y} \right) dy$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{y}{3} - \frac{1}{3y^5} \right) dy = \frac{27}{64}$$



说明 1) 积分次序选择得好，能化繁为简，化难为易。

2) 积分区域具有可加性。

3、如果积分区域 D： 矩形域

$$\{(x,y)\,|\,a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$$

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy$$

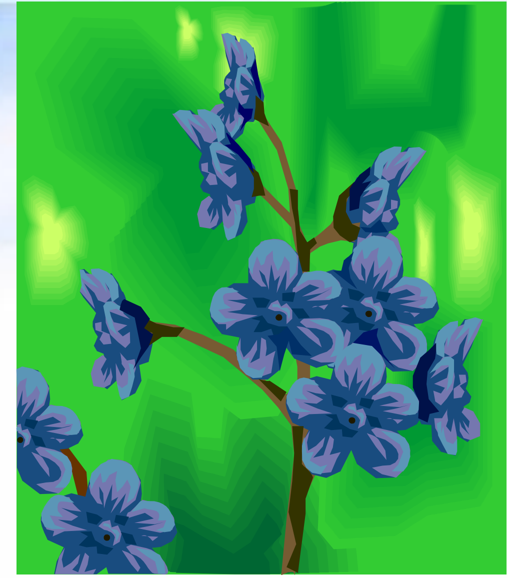
$$=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx$$

表明：此时二重积分与积分的先后次序无关。

若 $f(x,y)=f_1(x)f_2(y)$ 时，

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_a^b f_1(x)dx\int_c^d f_2(y)dy$$

二重积分计算步骤:



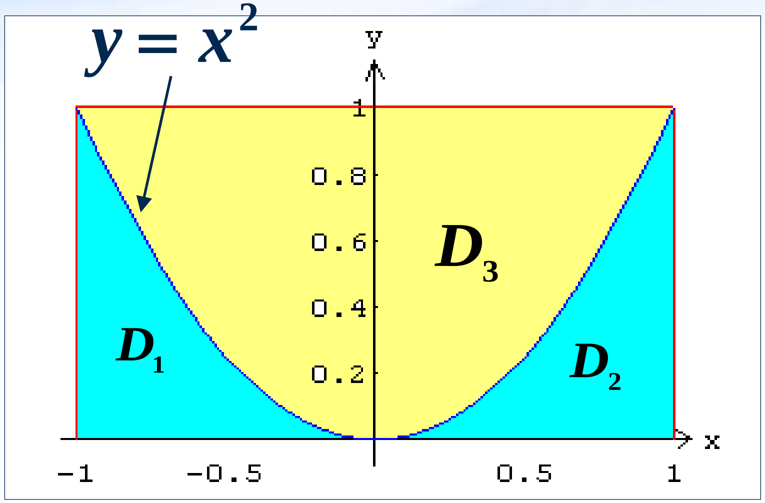
1) 画草图

2) 确定积分限

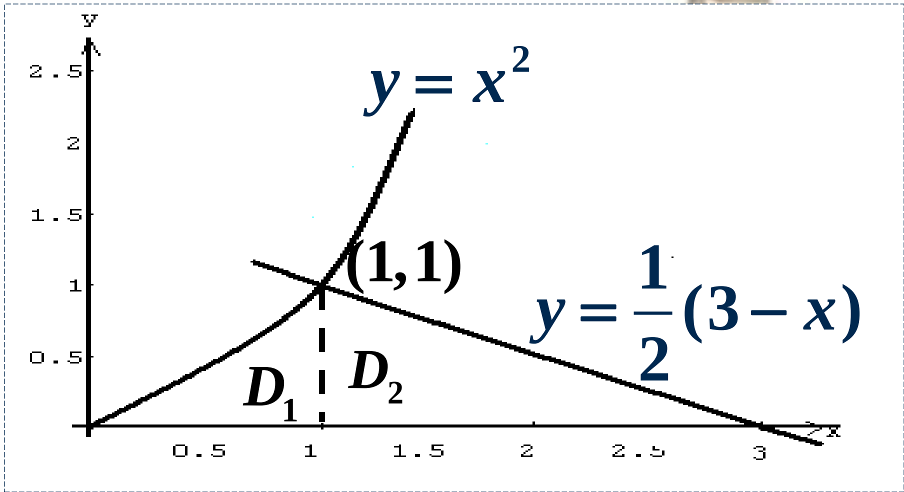
3) 确定一种积分次序

4) 计算

例2、计算 $\iint\limits_D |y-x^2| d\sigma$, $D=\{-1\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$.



例3、改变 $\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy+\int_1^3 dx\int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x,y)dy$ 的次序。



例4、计算积分 $I=\int_0^e dy\int_1^2 \frac{\ln x}{e^x}dx+\int_e^{e^2} dy\int_{\ln y}^2 \frac{\ln x}{e^x}dx$.

解： $\because \int \frac{\ln x}{e^x}dx$ 无法用初等函数表示，

$\therefore$ 积分时须考虑积分次序，

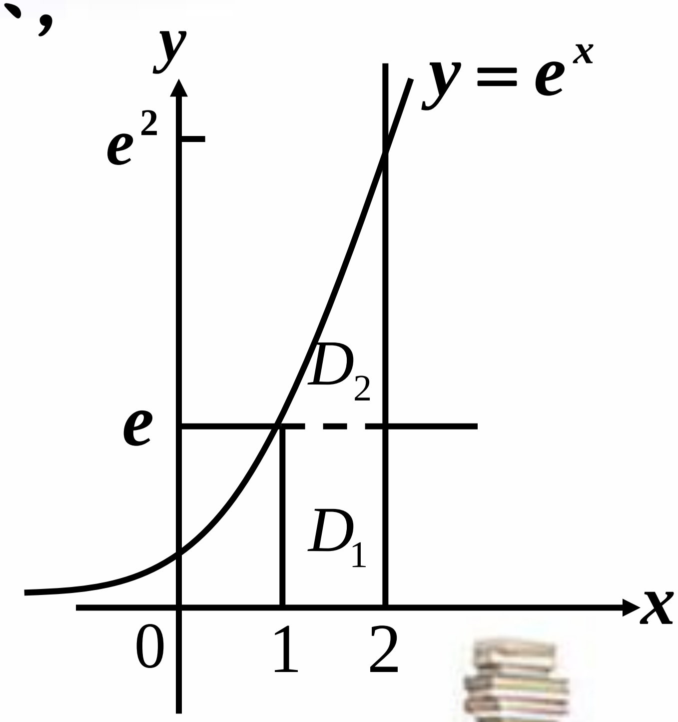
$D_1: 0\le y\le e \quad 1\le x\le 2$

$D_2: e\le y\le e^2 \quad \ln y\le x\le 2$

$$I=\int_1^2 dx\int_0^{e^x} \frac{\ln x}{e^x}dy$$

$$=\int_1^2 \frac{\ln x}{e^x}\cdot y\Big|_0^{e^x} dx=\int_1^2 \ln x dx$$

$$=x\ln x\Big|_1^2-\int_1^2 x\cdot\frac{1}{x}dx=2\ln 2-1$$



说明

1) 二重积分的计算与积分次序的选择有关，

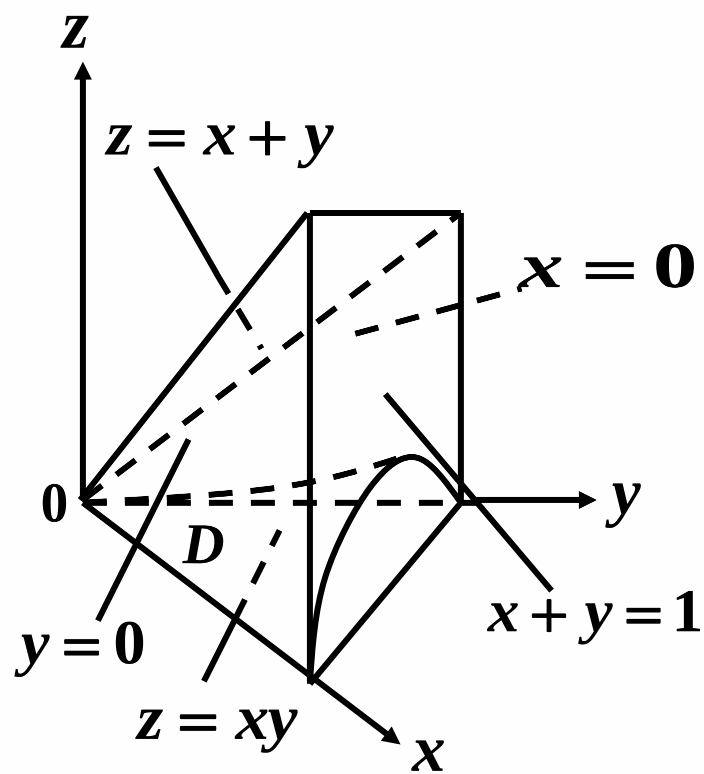
应依据
- 积分区域 D 的形状，
- 被积函数 $f(x, y)$ 的特点；

2) 如果按照某种给定的或选取的顺序是不容易的、或无法用初等函数表示出来时，需改变积分次序；

3) 改变积分次序的步骤。

4、求空间区域的体积

例5、求由马鞍面 $z = xy$ 和平面 $z = x + y$，$x + y = 1$，$x = 0$，$y = 0$ 所围成的空间区域的体积。



例6、求 $I=\iint\limits_D (x+y)d\sigma$，其中 $D: x^2\le y\le 4x^2$ 及 $y=1$

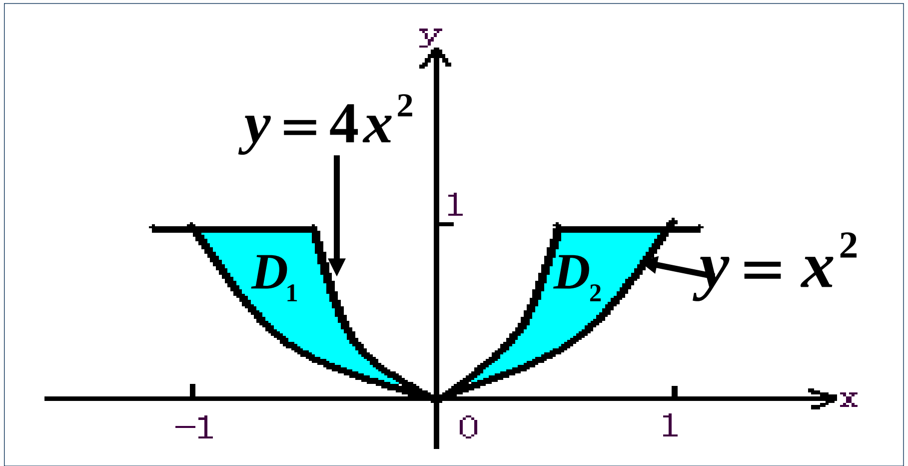
所围成的区域。

解： $\iint\limits_D (x+y)d\sigma = 2\int_0^1 dy\int_{\frac{\sqrt{y}}{2}}^{\sqrt{y}}(x+y)dx=\frac{31}{40}$ 错!!

$$\iint\limits_D (x+y)d\sigma=\iint\limits_{D_1}(x+y)dxdy+\iint\limits_{D_2}(x+y)dxdy$$

$$=\int_0^1 dy\left[\int_{-\sqrt{y}}^{-\frac{\sqrt{y}}{2}}(x+y)dx+\int_{\frac{\sqrt{y}}{2}}^{\sqrt{y}}(x+y)dx\right]$$

$$=\frac{2}{5}$$ 正确!!!



5、利用被积函数的奇偶性和积分区域的对称性，可以简化二重积分的计算。

1）若区域 D关于 x 轴对称

则 $$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy=\begin{cases} 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy & f(x,-y)=f(x,y) \\ 0 & f(x,-y)=-f(x,y) \end{cases}$$

其中 D_1 为 D 位于 x 轴一侧的部分；

2）若区域 D关于 y 轴对称

则 $$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy=\begin{cases} 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy & f(-x,y)=f(x,y) \\ 0 & f(-x,y)=-f(x,y) \end{cases}$$

其中 D_1 为 D 位于 y 轴一侧的部分；

例6、求 $I=\iint\limits_D (x+y)d\sigma$，其中 $D: x^2 \le y \le 4x^2$ 及 $y=1$

所围成的区域。

解：$I=\iint\limits_D (x+y)d\sigma=\iint\limits_D xdxdy+\iint\limits_D ydxdy=I_1+I_2$

I_1：$\because D$ 关于y 轴对称，

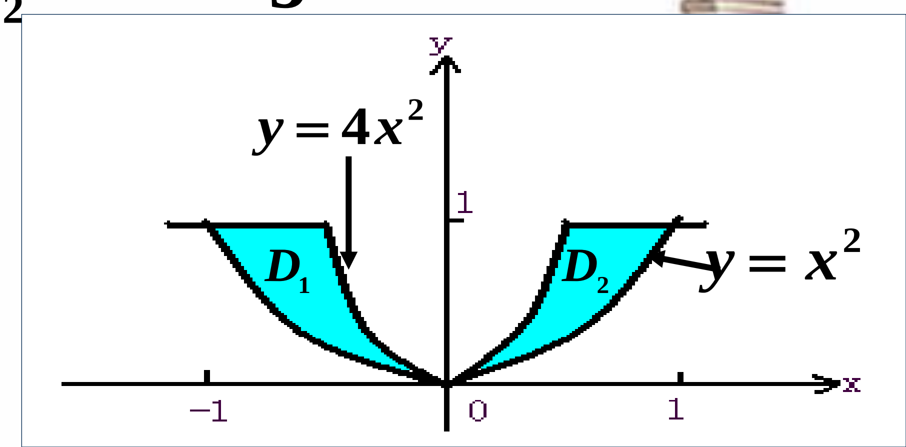
且被积函数关于 x 是奇函数，

$\therefore I_1=0$

I_2：$\because D$ 关于y 轴对称，且被积函数关于x是偶函数

$$\therefore\ I_2=2\iint\limits_{D_2} ydxdy=2\int_0^1 dy\int_{\frac{\sqrt{y}}{2}}^{\sqrt{y}} ydx=\frac{2}{5}$$

$$\therefore I=\frac{2}{5}$$



3）若区域 D 关于 $y=x$ 对称，

且 $f(x,y)$ 关于x，y 也对称，即 $f(x,y)=f(y,x)$，

则 $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy$

其中 D_1 为 D 位于 $y=x$ 的一侧部分。

说明

在利用对称性时，必须同时兼顾被积函数的奇偶性和积分区域关于轴和点的对称性两个因素。

例7、计算 $\iint\limits_D x[|y|+\tan y\cos(x^2+y^4)]dxdy$，

$D: y=\sin x,\ y=-\sin x$，在 $0\le x\le \pi$ 的部分所围。

二、二重积分的变量代换法

二重积分的换元

是从原变量 (x,y) 到新变量 (u,v) 的一个

变换映射。

定理 设 f 是 Oxy 平面中闭区域 D 上的连续函数，

变换 $\varphi:\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \end{cases}$ Ouv 平面上的闭区域 D' 一对一地映射为区域 D，

且 1）$x(u,v)$，$y(u,v)$ 在 D' 上具有连续的一阶偏导数，

2）在 D' 上 φ 的 Jacobi 行列式

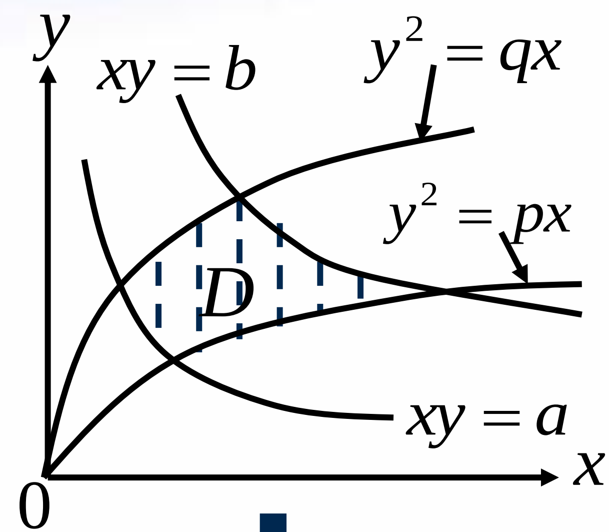
$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}\neq 0$$

则有

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D'} f[x(u,v),y(u,v)]\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|dudv$$

例8、设 $q > p > 0, b > a > 0$，求由 $y^2 = px, y^2 = qx,$

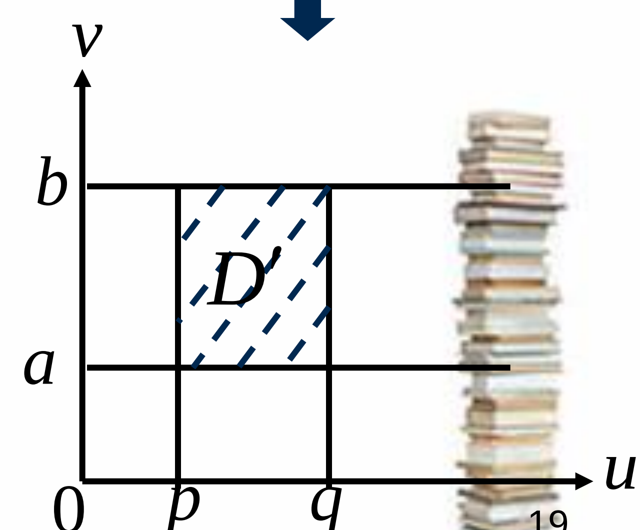
$xy = a, xy = b$ 所围成的平面区域 D 的面积。



解：区域 D 的面积为 $A = \iint\limits_D d\sigma$

作变量代换

$$D': \begin{cases} u = \dfrac{y^2}{x} & p \le u \le q \\ v = xy & a \le v \le b \end{cases}$$ 矩形域



$$\therefore A = \iint\limits_D d\sigma = \iint\limits_{D'} \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| dudv$$

$$= \iint\limits_{D'} \left| \left(\frac{D(u,v)}{D(x,y)} \right)^{-1} \right| dudv$$

$$\because \frac{D(u,v)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x}\\ y & x\end{vmatrix}=-\frac{3y^2}{x}=-3u$$

$$\left|\left(\frac{D(u,v)}{D(x,y)}\right)^{-1}\right|=\frac{1}{3u}$$

$$\therefore A=\iint_{D'}\left|\left(\frac{D(u,v)}{D(x,y)}\right)^{-1}\right|dudv=\int_a^b dv\int_p^q\frac{1}{3u}du$$

$$=\frac{b-a}{3}\ln\frac{q}{p}$$

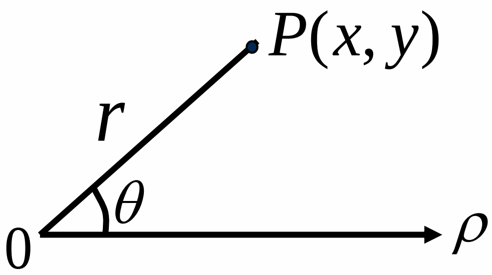
说明　变量代换后积分区域简便，被积函数易求。

例9、计算 $\iint\limits_D e^{\frac{y-x}{y+x}}dxdy$，$D: x=0, y=0, x+y=2$ 围成。

三、极坐标系下二重积分的计算

直角坐标和极坐标的关系

$$x^2+y^2=r^2$$



$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$$ 相当于一个变量代换

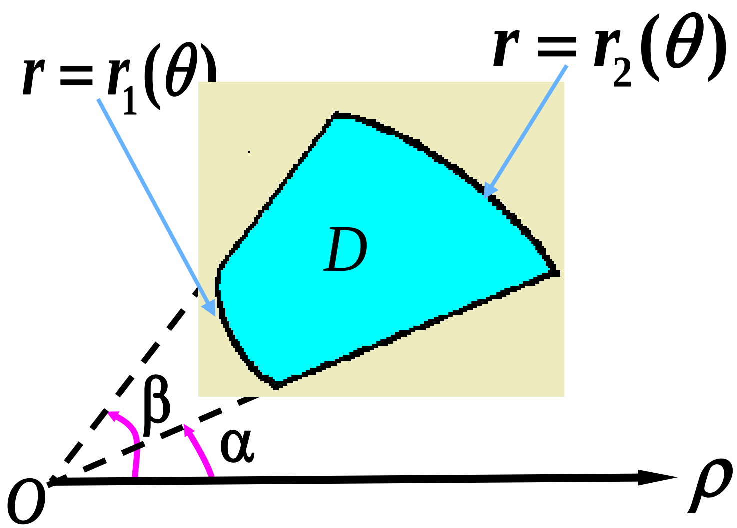
$$\therefore D': \left\{(r,\theta)\middle|\alpha\le\theta\le\beta\ \ r_1(\theta)\le r\le r_2(\theta)\right\}$$

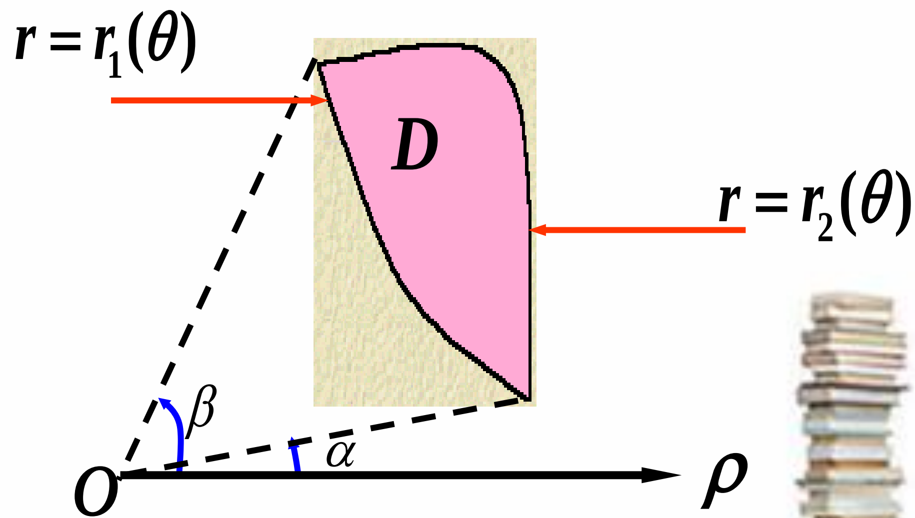
$$\therefore \iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\iint\limits_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\left|\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)}\right|drd\theta$$

$$又 \because \frac{D(x,y)}{D(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

$$\therefore d\sigma = r\,dr\,d\theta$$

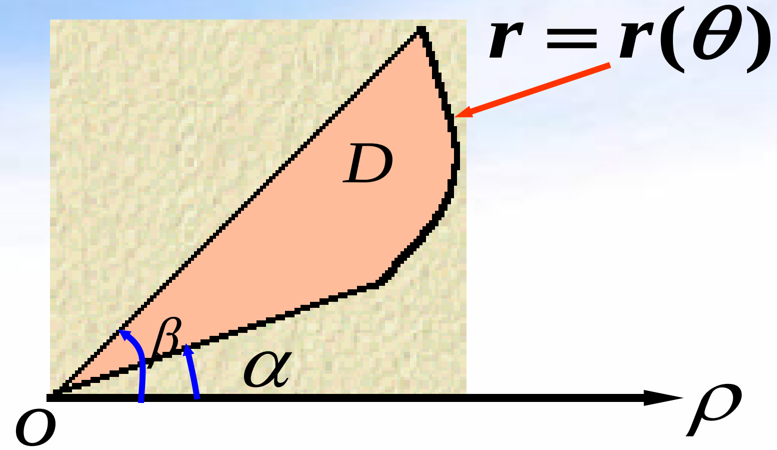
说明 1）当区域如图时，





$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr$$

2）当区域如图时，

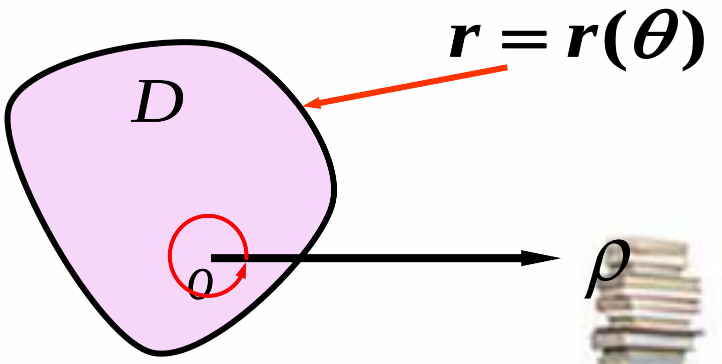


$$\alpha\le\theta\le\beta \qquad 0\le r\le r(\theta)$$

$$\iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_\alpha^\beta d\theta\int_0^{r(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr$$

3）当区域如图时，



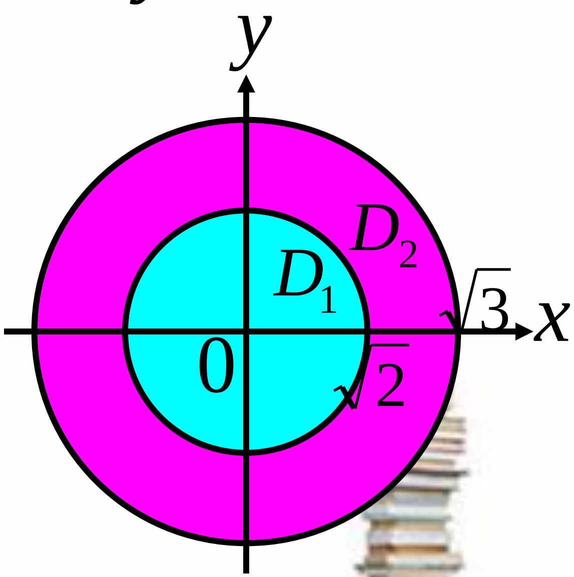
$$0\le\theta\le 2\pi \qquad 0\le r\le r(\theta)$$

$$\iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{r(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr$$

例10、计算 $I=\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$.

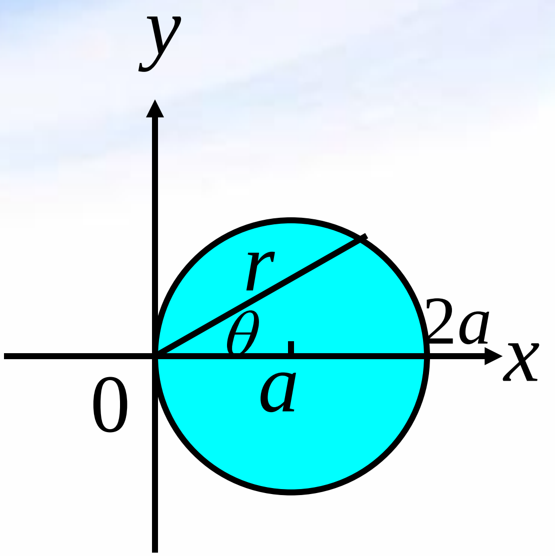
例11、计算 $I=\iint\limits_{D}\left|x^2+y^2-2\right|dxdy$, $D: x^2+y^2\le 3$.



说明 1）当区域 $D: x^2+y^2 \le 2ax$

设 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

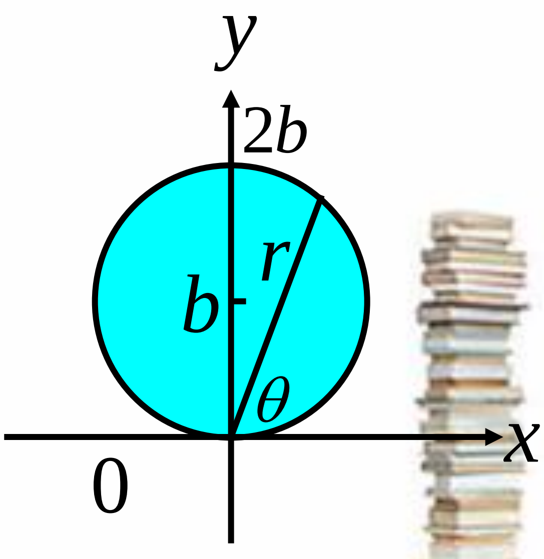
$$\Rightarrow D': \begin{cases} 0 \le r \le 2a\cos\theta \\ -\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$



2）当区域 $D: x^2+y^2 \le 2by$

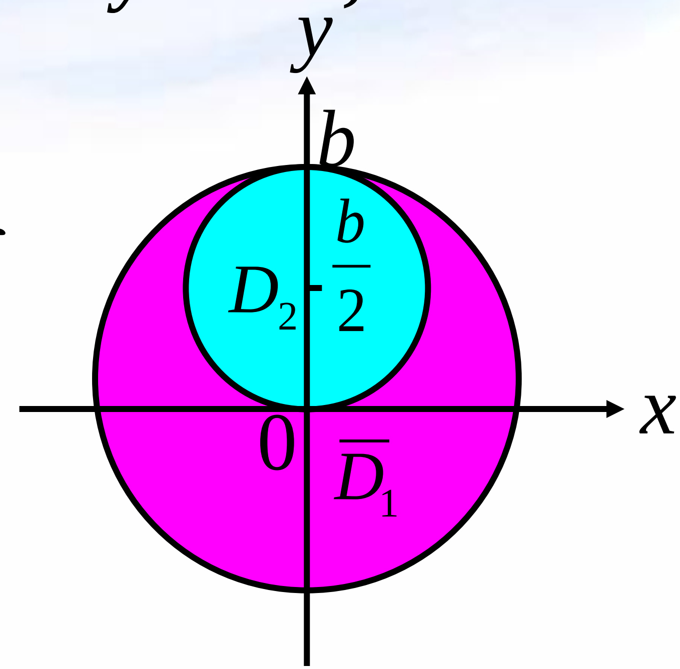
设 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

$$\Rightarrow D': \begin{cases} 0 \le r \le 2b\sin\theta \\ 0 \le \theta \le \pi \end{cases}$$



例12、计算 $I=\iint\limits_{D}\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$，$D: x^2+y^2=b^2$，

$x^2+y^2=by$ 所围成的区域。



解：$\because$ 被积函数 $\sqrt{x^2+y^2}$ 在 D 中有定义且连续，

$$\therefore \iint\limits_{D}\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$$

$$=\iint\limits_{D_1}\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma-\iint\limits_{D_2}\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$$

$$=2\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^b r\cdot rdr-\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{b\sin\theta}r\cdot rdr\right]$$

$$=\frac{2b^3}{3}\left(\pi-\frac{2}{3}\right)$$

说明

1）在区域相减时，定要考虑被积函数在减去的区域中是否有定义、连续，否则不能用相减的方法，只能分区域。

2）被积函数中有根式相减时，应尽量利用对称性。

3）极坐标的适用范围

积分区域：圆形、环形、扇形、弧线等；

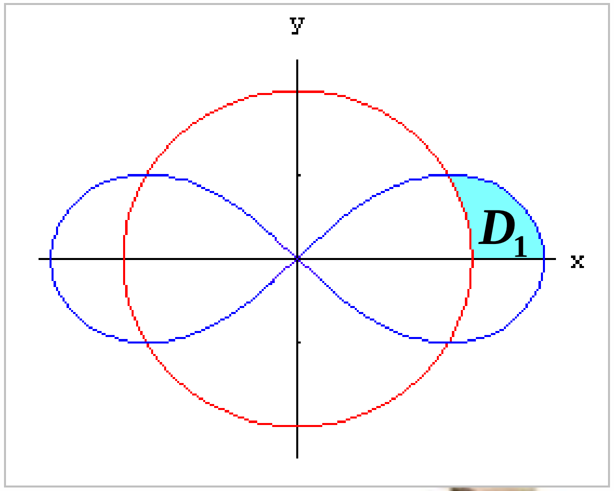
被积函数：$f(x^2+y^2)$，$f(\dfrac{y}{x})$.

例13、计算 $\iint_D \arctan\frac{y}{x}d\sigma$，$D: 1\le x^2+y^2\le 9$，

$y=x, y=0$ 所围成的第一象限区域。

例14、求曲线 $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$ 和 $x^2+y^2\ge a^2$

所围成图形的面积。



例15、计算

$$\iint\limits_{D}\frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^2},\ D:\{(x,y)\,|\,(x^2+y^2)^2\le x^2-y^2,\ x\ge 0\}.$$

例16、证明

$$\int_a^b dx\int_a^x (x-y)^{n-2}f(y)dy=\frac{1}{n-1}\int_a^b (b-y)^{n-1}f(y)dy$$