第八章 多元函数积分学

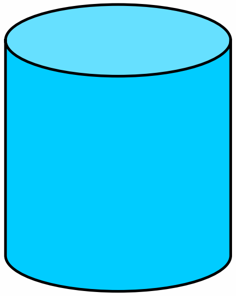
§1 重积分的概念及其性质

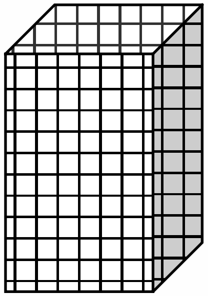
一、问题的提出

曲顶柱体的体积

先看平顶柱体的体积

柱体的体积 = 底面积 ×高

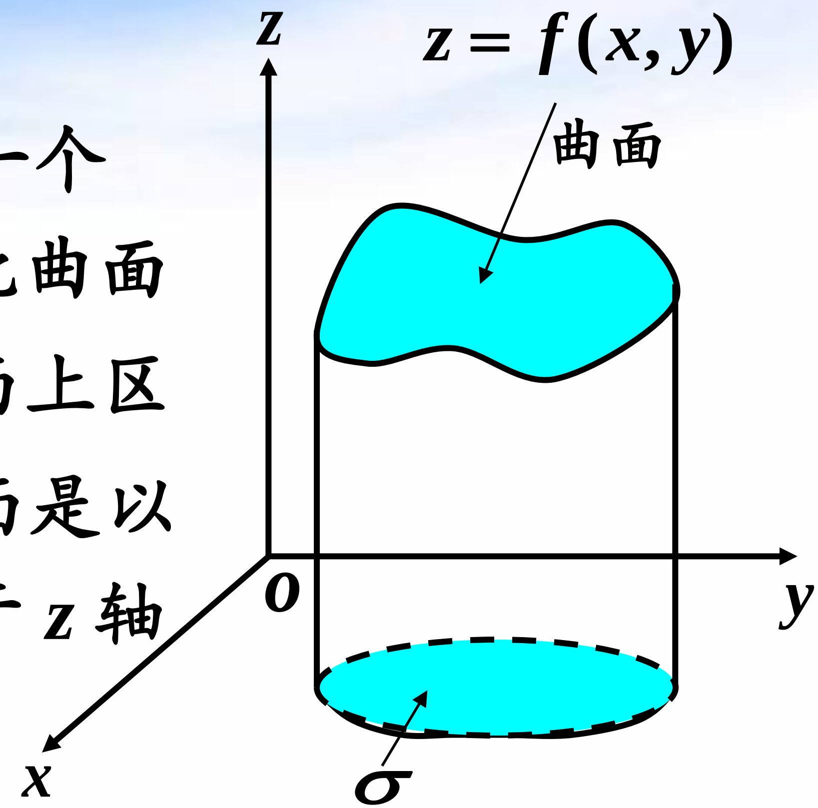




那么曲顶柱体呢？

曲顶柱体：

f 是定义在平面区域 σ 上的一个非负二元函数（曲面），以此曲面 $z=f(x,y)$ 为顶，以 Oxy 平面上区域 σ 为底的空间区域，其侧面是以 σ 的边界为准线，母线平行于 z 轴的柱面。



求此曲顶柱体体积的过程：

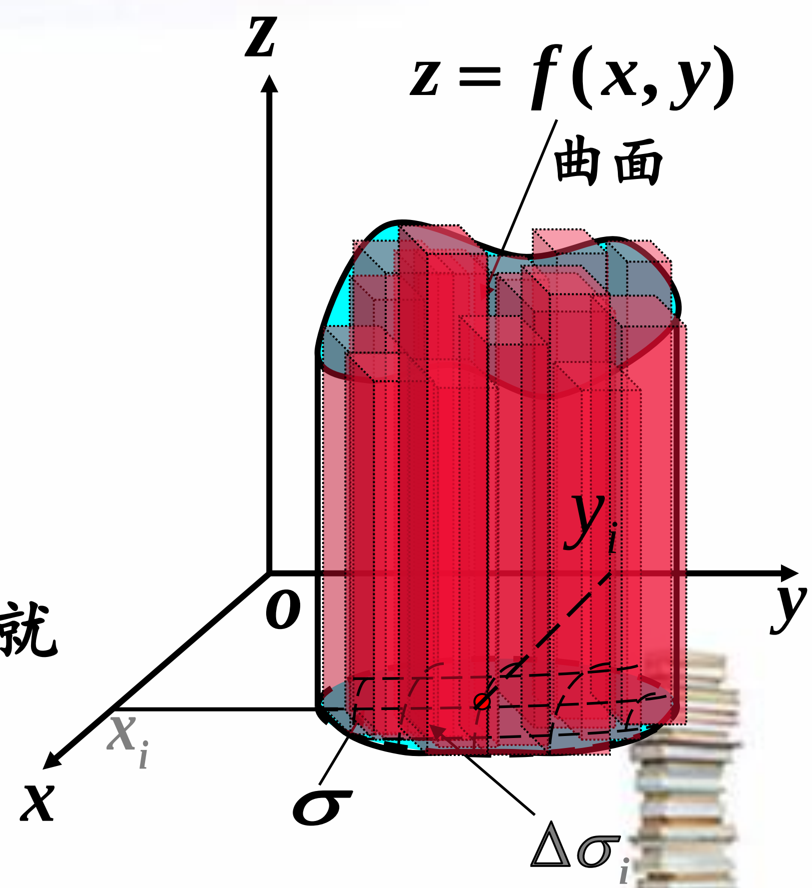
分四步：

1) 分割:

分割区域 σ 为 n 个小区域 $\Delta\sigma_1,\cdots,\Delta\sigma_n$，

即得到 n 个小曲顶柱体,

$\Delta\sigma_i$: 第 i 个小区域的面积;



2) 代替:

在每个小区域上任取一点

$(x_1,y_1),\cdots,(x_n,y_n)$,

则第 i 个小曲顶柱体的体积就

用小平顶柱体体积近似代替

$\Delta V_i=f(x_i,y_i)\Delta\sigma_i$;

3) 求和:

n 个平顶柱体的体积之和

$$V=\sum_{i=1}^{n}\Delta V_i\approx\sum_{i=1}^{n}f(x_i,y_i)\Delta\sigma_i$$

为曲顶柱体体积的近似值;

4) 取极限:

使分割越来越细，且这些小区域都趋于一点（即小区域的最大直径 $\max\{d_i\}\to 0$ ），

上式和式的极限就是曲顶柱体的体积

$$V=\lim_{\max\{d_i\}\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(x_i,y_i)\Delta\sigma_i$$

一、二重积分的定义

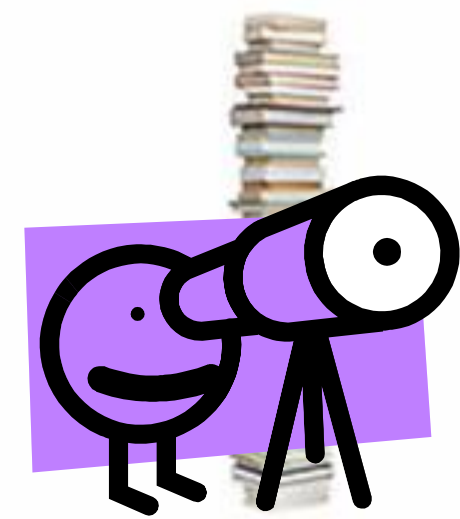
设 Ω 是一个有界区域，$f:\Omega\to R$ 是一个有界函数，任意分 Ω 为 n 个内部互不相交（重叠）的子区域 $\Delta\Omega_i\ (i=1,\cdots,n)$，记 $\Delta\Omega_i$ 的直径为d_i（即 $\Delta\Omega_i$ 中任意两点的距离的‘最大值’），并记其面积为$\Delta\sigma_i$，

任取一点 $P_i\in\Delta\Omega_i$，

作和式 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta\sigma_i$

如果 $\lambda=\max(d_1,\cdots,d_n)\to 0$ 时，

$I=\lim\limits_{\max\{d_i\}\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta\sigma_i$ 存在，



则称 f 在 Ω 上 **Riemann 可积**，简称**可积**。

称和式的极限 I 为 f 在 Ω 上 **Riemann 积分**，记为

$$\int_{\Omega} f d\sigma = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta\sigma_i$$

积分号　积分区域　被积函数　面积元素

说明 当 $\Omega \subset R^2$（平面区域）时，称 I 为**二重积分**。

记为 $I = \iint_{\Omega} f(x,y) d\sigma = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i$

积分变量

对二重积分定义的说明：

1) 定义中，对闭区域的划分是任意的；

2) 当 $f(x,y)$ 在闭区域上连续时，定义中和式的极限必存在，即二重积分比存在；

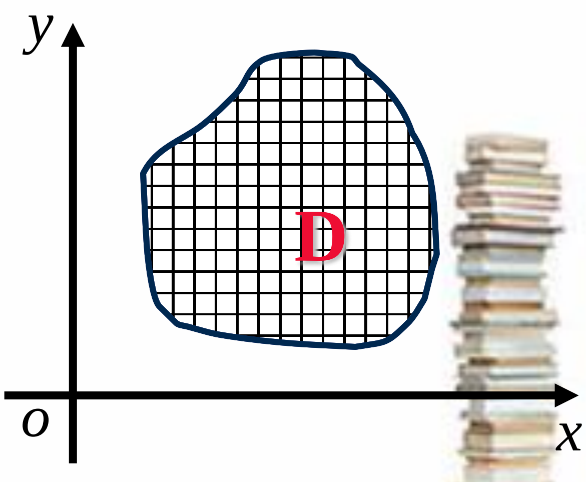
3) 二重积分的几何意义——曲顶柱体的体积；

4) 在直角坐标系下用平行于坐标轴的直线网来划分区域 D，则面积元为

$$d\sigma = dxdy,$$

二重积分改写为：

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_D f(x,y)dxdy$$



三、重积分的性质

1、线性性

若 f 和 g 是 Ω 上的可积函数，$\alpha,\beta \in R$，

则 $\int_{\Omega}(\alpha f+\beta g)d\sigma=\alpha\int_{\Omega}fd\sigma+\beta\int_{\Omega}gd\sigma$

二重积分　即 Ω 为平面区域 D，

$$\iint_D(\alpha f+\beta g)d\sigma=\alpha\iint_D fd\sigma+\beta\iint_D gd\sigma$$

2、可加性

若 Ω 可分解为内部互不相交的区域 Ω_1 和 Ω_2 的并，

f 是 Ω 上的可积函数，则

$$\int_{\Omega} f\, d\sigma = \int_{\Omega_1} f\, d\sigma + \int_{\Omega_2} f\, d\sigma$$

二重积分　即 Ω 为平面区域 D，

$$\iint_{D} f(x,y)d\sigma = \iint_{D_1} f(x,y)d\sigma + \iint_{D_2} f(x,y)d\sigma$$

3、若在 Ω 上，$f=1$，

$A=\iint_{\Omega} d\sigma$ 为积分区域 Ω 的面积 A.

4、保号性

若 Ω 上的两可积函数 f 和 g，满足 $f \le g$，

则 $\int_{\Omega} f\, d\sigma \le \int_{\Omega} g\, d\sigma$.

特别地 $\left|\int_{\Omega} f\, d\sigma\right| \le \int_{\Omega} |f|\, d\sigma$.

二重积分　　即 Ω 为平面区域 D，

$$\iint_D f(x,y)d\sigma \le \iint_D g(x,y)d\sigma$$

特别地 $\left|\iint_D f(x,y)d\sigma\right| \le \iint_D |f(x,y)|d\sigma$.

5、估值定理

若 f 是 Ω 上的可积函数，常数 M_1, M_2 满足

$M_1 \le f \le M_2$，

则 $$M_1\sigma \le \int_{\Omega} f\,d\sigma \le M_2\sigma.$$

二重积分

Ω 为平面区域 D，σ 为区域 D 的面积，

$$M_1\sigma \le \iint_D f(x, y)d\sigma \le M_2\sigma.$$

6、中值定理

若 f 是有界闭区域 Ω 上的连续函数，

则必存在 $P\in\Omega$，使得 $\int_{\Omega} f\,d\sigma = f(P)\sigma$.

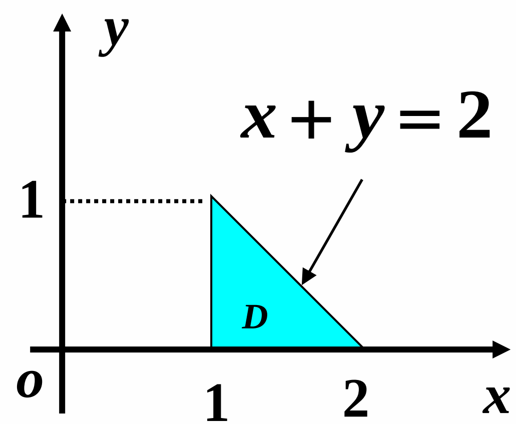
二重积分

Ω 为平面区域 D，σ 为区域 D 的面积，

$$\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)\cdot\sigma .$$

例1、判断 $\iint\limits_{|x|+|y|\le 1} \ln(x^2+y^2)dxdy$ 的符号。

例2、比较积分 $\iint\limits_{D} \ln(x+y)d\sigma$ 与 $\iint\limits_{D} [\ln(x+y)]^2 d\sigma$ 的大小，其中 D 是由三个顶点 (1, 0) , (1, 1) , (2, 0) 组成的三角形区域。



例3、不计算，估计 $I=\iint\limits_{D} e^{x^2+y^2}d\sigma$ 的值，

其中区域 D：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (0<b<a)$.

例4、求 $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{1}{\pi\rho^2}\iint\limits_{x^2+y^2\le\rho^2} f(x,y)d\sigma$，$f(x,y)$ 为连续函数。